ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Методические материалы для председателей
и членов региональных предметных комиссий
по проверке выполнения заданий с развернутым ответом
экзаменационных работ ОГЭ 2018 года**

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ОГЭ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Москва
2018

Руководитель федеральной комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФИПИ.
Авторы–составители: А.В. Семенов, М.А. Черняева.

Повышение объективности результатов государственной итоговой аттестации по программам основного общего образования в форме основного государственного экзамена (*далее ОГЭ*) во многом определяется качеством экспертной проверки предметными комиссиями выполнения заданий с развернутым ответом.

Порядок проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования (приказ №1394 от 25.12.2013) устанавливает обязательность прохождения экспертами, проверяющими экзаменационные работы обучающихся, «дополнительного профессионального образования, включающего в себя практические занятия (не менее 18 часов) по оцениванию образцов экзаменационных работ в соответствии с критериями оценивания экзаменационных работ по соответствующему учебному предмету, определяемыми Рособрнадзором».

С этой целью специалистами Федерального института педагогических измерений подготовлены методические материалы для организации подготовки экспертов предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом в 2018 г. Пособие по предмету включает в себя описание экзаменационной работы 2018 г., научно-методические подходы к проверке и оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов участников экзамена с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Авторы будут благодарны за предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развёрнутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике. Пособие состоит из трёх частей.

В первой части «Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ОГЭ с развёрнутым ответом. Математика» даётся краткое описание структуры контрольных измерительных материалов 2018 года по математике, характеризуются общие подходы к применению предложенных критериев оценки решений математических заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания решений и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

Во второй части «Материалы для самостоятельной работы экспертов» в целях организации самостоятельной и групповой работы экспертов приводятся примеры решений, которые эксперты должны по результатам коллективного обсуждения оценить в соответствии с критериями оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.

В третьей части «Материалы для проведения зачёта» приведены примеры решений заданий с развёрнутым ответом, предназначенные для проведения индивидуальных зачётных работ по проверке подготовки экспертов.

Каждое задание второй части КИМ ОГЭ по математике оценивается в два балла.

	Нумерация заданий						Общ. балл
2018 (6 заданий)	№21	№22	№23	№24	№25	№26	
Максим. балл	2	2	2	2	2	2	12

Тематическая принадлежность заданий осталась в основном неизменной. А именно, в 2018 году, задание №21 – упрощение алгебраических выражений, решение уравнений, решение систем уравнений, №22 – решение текстовой задачи, №23 – построение графика функции, №24 – задача на вычисление по геометрии, №25 – задача по геометрии на доказательство, №26 – геометрическая задача по геометрии высокого уровня сложности.

§1. Характеристика экзаменационной работы 2018 года.

Назначение заданий с развернутым ответом и их особенности

Государственная итоговая аттестация в форме основного государственного экзамена (далее ОГЭ) для обучающихся, освоивших образовательные программы основного общего образования), проводится в соответствии с Федеральным законом Российской Федерации от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации», с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования, утвержденным приказом Минобрнауки России от 25.12.2013 № 1394 (зарегистрирован Минюстом России 03.02.2014, регистрационный № 31206) (в последующих редакциях).

Содержание экзаменационной работы ОГЭ по математике определяется на основе содержания образования, обозначенного «Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование» (Приказ Минобразования России от 05.03.2004 №1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

Кроме того, в экзаменационной работе нашли отражение концептуальные положения Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»). Контрольные измерительные материалы (далее КИМ) разработаны с учётом положения, что результатом освоения основной образовательной программы основного общего образования должна стать математическая компетентность выпускников, т.е. они должны: овладеть специфическими для математики знаниями и видами деятельности; научиться преобразованию знания и его применению в учебных и внеучебных ситуациях; сформировать качества, присущие математическому мышлению, а также овладеть математической терминологией, ключевыми понятиями, методами и приёмами.

Работа состоит из трёх модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика». В модули «Алгебра» и «Геометрия» входит две части, соответствующие проверке на базовом, повышенном и высоком уровнях, в модуль «Реальная математика» – одна часть, соответствующая проверке на базовом уровне.

При проверке базовой математической компетентности учащиеся должны продемонстрировать: владение основными алгоритмами, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение пользоваться математической записью, применять знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применять математические знания в простейших практических ситуациях.

Части 2 модулей «Алгебра» и «Геометрия» направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне. Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Эти части содержат задания повышенного уровня сложности из различных разделов курса математики. Все задания требуют записи решений и ответа. Задания расположены по нарастанию трудности – от относительно более простых до сложных, предполагающих свободное владение материалом курса и хороший уровень математической культуры.

Модуль «Алгебра» содержит 11 заданий: *в части 1* – 8 заданий, *в части 2* – 3 задания.

Модуль «Геометрия» содержит 8 заданий: *в части 1* – 5 заданий, *в части 2* – 3 задания.

Модуль «Реальная математика» содержит 7 заданий *в части 1*.

Всего: 26 заданий, из которых 20 заданий базового уровня, 4 задания повышенного и 2 задания высокого уровня сложности.

Все задания второй части экзаменационной работы носят комплексный характер. Они позволяют проверить владение формально-оперативным аппаратом, способность к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение достаточно широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение математически грамотно записать решение.

Задания части 2 относятся к двум модулям – «Алгебра» и «Геометрия». В внутри каждого модуля они расположены по нарастанию сложности – от относительно простой задачи до задач достаточно сложных, требующих свободного владения материалом курса и высокого уровня математического развития. Фактически во второй части работы представлены три разных уровня. Первые задания (задание 21 – алгебраическое, задание 24 – геометрическое) наиболее простые. Как правило, они направлены на проверку владения формально-оперативными алгебраическими навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, систем, построение графика, и умению решить несложную геометрическую задачу на вычисление. По уровню сложности эти задания немногим превышают обязательный уровень.

Следующие два задания (задание 22 – алгебраическое, задание 25 – геометрическое) более высокого уровня, они сложнее предыдущих и в техническом, и в логическом отношении. При хорошем выполнении первой части правильное выполнение этих заданий соответствует отметке «5».

И, наконец, последние два задания (задание 23 – алгебраическое, задание 26 – геометрическое) высокого уровня сложности, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса, – это, например, углубленный курс математики, элективные курсы в ходе предпрофильной подготовки, математические кружки и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении выпускник должен продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера.

§2. Общие подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение заданий 21–26 удовлетворяет этим требованиям, то выставляется полный балл – 2 балла за каждое задание. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

В критериях оценивания по каждому конкретному заданию второй части экзаменационной работы эти общие позиции конкретизируются и пополняются с учетом содержания задания. Критерии разработаны применительно к одному из возможных решений, а именно, к тому, которое описано в рекомендациях. При наличии в работах учащихся других решений критерии вырабатываются предметной комиссией с учетом описанного общего подхода. Решения учащихся могут содержать недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно (со снятием одного балла). В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

Результаты оценивания заданий фиксируются в протоколе проверки развернутых ответов.

Рисунок 1. Вариант формата бланка протокола проверки развернутых ответов

Протокол проверки развернутых ответов

Регион 74 Код предмета 2 Название предмета Математика (2018.04.20) Номер протокола 1000005

ФИО эксперта Иванов И.И. Код эксперта 100082

Примечание

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

№	Код бланка	Позиции оценивания																			
		21	22	23	24	25	26														
1																					
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					

Дата проверки ▢▢ - ▢▢ - ▢▢ Подпись эксперта

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в Протокол проверки развернутых ответов следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «**X**», а не «0».

§3. Примеры оценивания ответов по каждому типу заданий с развернутым ответом с комментариями.

Задача 21 (демонстрационный вариант 2017 г).

Сократите дробь $\dfrac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}$.

Решение.

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{(9\cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{3^{2n+6}\cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=3^{2n+6-(2n+5)}\cdot 2^{n+3-(n-2)}=3\cdot 2^5=96.$$

Ответ: 96.

Критерии оценки выполнения задания 21.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Небольшое уточнение с «ошибка или описка» до «ошибки или описки» подчеркивает тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка (описка) стала причиной того, что неверен ответ.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

Пример.

Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

№ 21

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\overset{x-1}{3}}{x-1}-\overset{(x-1)^2}{10}=0$$

О.Д.З.

$(x-1)^2 \neq 0$

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1;$

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$$1+3x-3-10(x^2-2x+1)=0$$

$$1+3x-3-10x^2+20x-10=0$$

$$-10x^2+23x-12=0$$

$$D=b^2-4ac,\quad D=529-480=49=\pm 7^2$$

$$x_1=\frac{-23+7}{-20}=\cancel{\ }\,1{,}5\qquad x_2=\frac{23-7}{-20}=\frac{-16}{20}=\overset{0{,}8}{\cancel{\ }}$$

Ответ: ~~ ~~ 1,5; 0,8

***Комментарий*.**

Работа интересная – записан верный ответ. Но присутствуют в последних строках:

а) ошибка в вычислении корня квадратного уравнения;

б) ошибка при сложении чисел с разными знаками;

в) ошибка в формуле корней квадратного уравнения;

г) ошибка при делении чисел с разными знаками.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Задача 22 (демонстрационный вариант 2017 г).

Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь. 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

Решение.

Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 4 км/ч, при движении по течению равна 8 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{8}\right)$ часа. Из условия задачи следует, что это время равно 3 часам. Составим уравнение: $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=3$. Решив уравнение, получим $x=8$.

Ответ: 8 км.

Критерии оценки выполнения задания 22.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно составлено уравнение, получен верный ответ
1	Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 22 тематически сохраняется несколько лет. Критерии его оценивания сохранились. Следует отметить, что при решении дробно-рационального уравнения, полученного в задаче, необязательно требовать от выпускника проверки условия не равенства нулю знаменателя.

Пример оценивания решения задания 22.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

22.

	V част. забора/ч	t ч	A част. забора
И+П	$\frac{1}{14}$	14	1
П+В	$\frac{1}{15}$	15	1
В+И	$\frac{1}{30}$	30	1

$$v(\text{И}+\text{П}+\text{П}+\text{В}+\text{В}+\text{И}) = \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{14} + \frac{1}{10} = \frac{5+7}{70} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35} \ (\text{ч.з./ч})$$

$$t = \frac{A}{v} = \frac{1}{\frac{6}{35}} = \frac{35}{6}\text{ч} = \frac{35 \cdot 60}{6}\text{мин} = 350 \text{ мин}$$

Ответ: 350

Комментарий.

Путь решения верный, но не учтена “удвоенная производительность”, – явно допущена вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 1 балл.

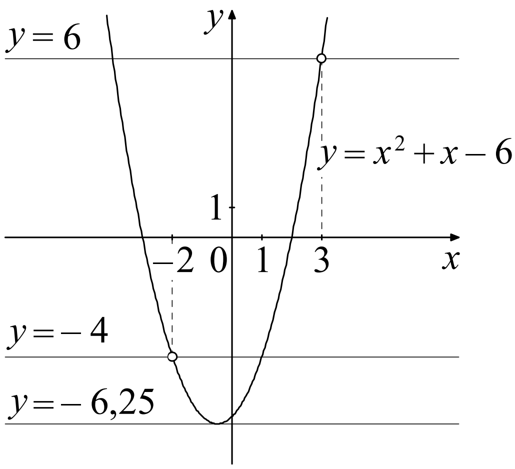
Задача 23 (демонстрационный вариант 2017 г).

Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4-13x^2+36=\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

При $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид: $y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2;-4)$ и $(3;6)$.



Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0{,}5;-6{,}25)$.

Поэтому $c=-6{,}25$, $c=-4$ или $c=6$.

Критерии оценки выполнения задания 23.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен правильно, верно указаны все значения c, при которых прямая $y=c$ имеет с графиком только одну общую точку
1	График построен правильно, указаны не все верные значения c
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика. Верное построение графика включает в себя: масштаб, содержательная таблица значений или объяснение построения, **выколотая точка обозначена в соответствии с ее координатами**.

Пример оценивания решения задания 23.

Постройте график функции $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

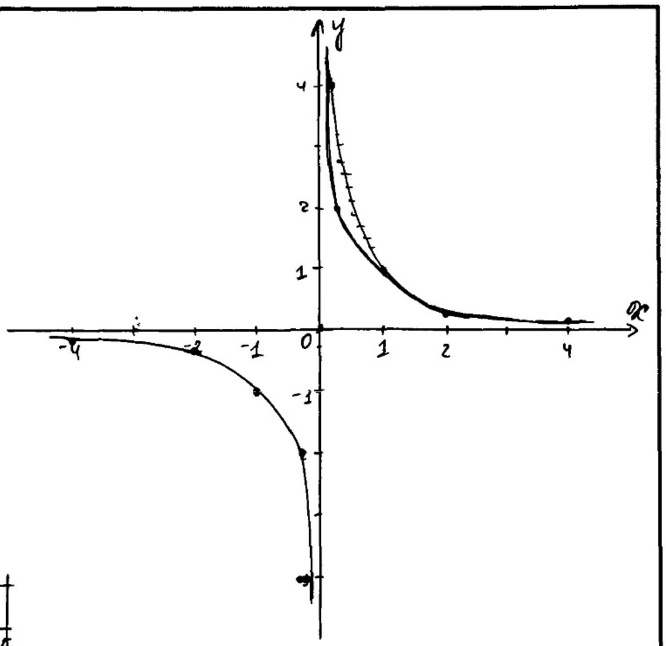
(23) $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

1) $9x^2+x\neq 0$

$x(9x+1)\neq 0$

$\boxed{x\neq 0}$ $\quad 9x\neq -1$

$\boxed{x\neq -\dfrac{1}{9}}$



2) $y=\dfrac{\cancel{(9x+1)}}{x\cancel{(9x+1)}}$

$y=\dfrac{1}{x}$

x	1	2	−1	−2	4	−4
y	1	0,5	−1	−0,5	0,25	−0,25

3) $\dfrac{kx}{1}=\dfrac{1}{x}$

$kx^2=1$ Если $y=1$, а $x^2=\left(-\dfrac{1}{9}\right)^2$, то:

$k\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^2=1$

$k\times\dfrac{1}{81}=1$

$\dfrac{k}{81}=\dfrac{1}{1}$

$k=81$ Ответ: при $k=81$

Комментарий.

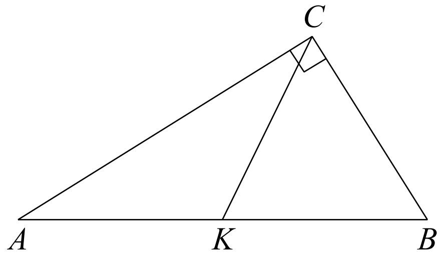
График построен неверно – отсутствует выколотая точка. В соответствии с критериями – 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Задача 24 (демонстрационный вариант 2017 г).

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.



$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$

Ответ: 5.

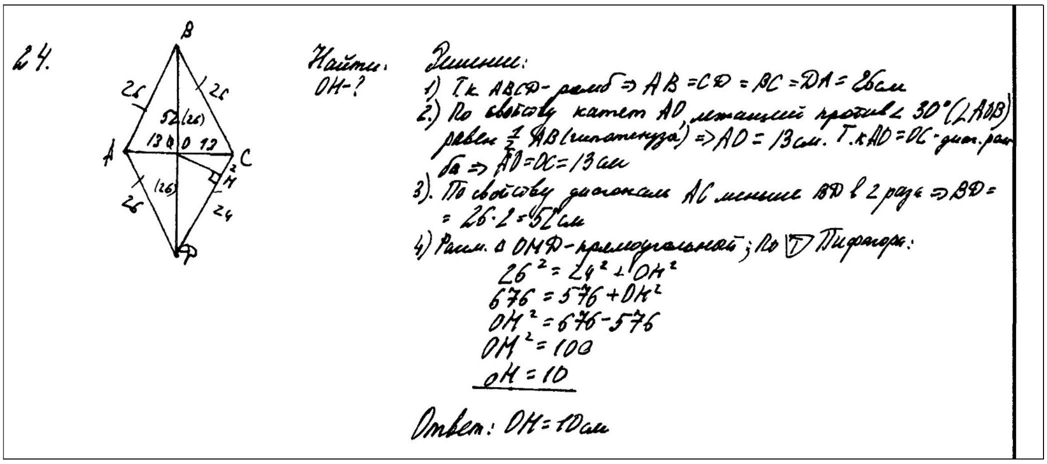
Критерии оценки выполнения задания 24.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Получен верный обоснованный ответ
1	При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 24 практически не менялось в течение нескольких лет. Критерии его оценивания сохранились.

Пример оценивания решения задания 24.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.
Ответ: 10.



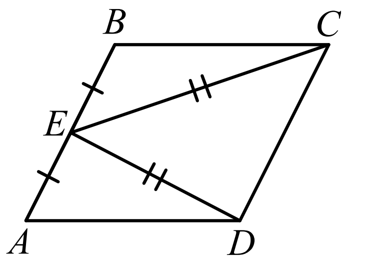
Комментарий.

Учащийся использует данные, которых нет в условии (считая острый угол ромба 60°).

Оценка эксперта: 0 **баллов.**

Задача 25 (демонстрационный вариант 2017 г).

В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



Доказательство. Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам.

Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна $180°$, то углы равны $90°$. Такой параллелограмм — прямоугольник.

Критерии оценки выполнения задания 25.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Пример оценивания решения задания 25.

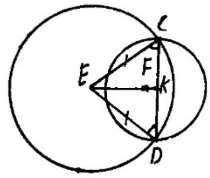
Пример.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

№25

Дано:
окр(E); окр(F)
окр$(E) \cap$ окр$(F) = C$ и D

Док-ть: $CD \perp EF$



~~Решение~~ Доказательство

Проведём EC и ED — радиусы, тогда $EC=ED$.
$\triangle ECD$ - равнобедренный, т.к $EC=ED$ (как радиусы) $\Rightarrow \angle EDC=\angle ECD$,
$CK=KD \Rightarrow \triangle EKC=\triangle EKD$ (по 2 сторонам и углу между ними).
Тогда $\angle CEK=\angle DEK \Rightarrow EK$-биссектриса $\angle CED$. В равнобедренном треугольнике биссектриса, выпущенная из вершины, является медианой и высотой $\Rightarrow EF \perp CD$ ч.т.д.

Комментарий.

Не доказано, что точка F лежит на высоте EK.

Оценка эксперта: 0 **баллов.**

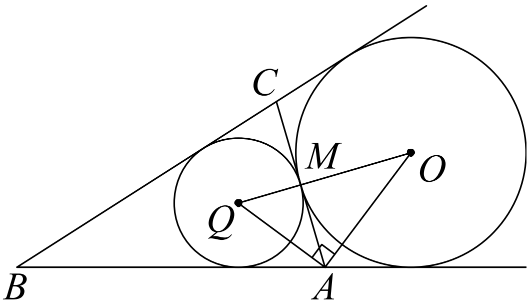
Задача 26 (демонстрационный вариант 2017 г).

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Точка касания M окружностей делит AC пополам.



Лучи AQ и AO — биссектрисы смежных углов, значит, угол OAQ прямой. Из прямоугольного треугольника OAQ получаем: $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

Критерии оценки выполнения задания 26.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

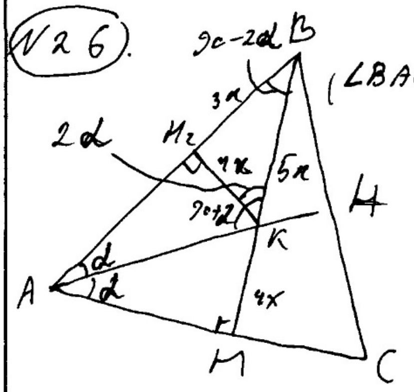
Пример оценивания решения задания 26.

Пример.

Биссектриса угла A, треугольника ABC делит высоту BH в отношении 5:4, считая от вершины. BC равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

№26.



(∠BAC=2α) опустим из K на AB высоту

Она равна KH т/к AC биссект.

$\angle AKB = 90+\alpha$ как внеш K

$\Delta AKH \Rightarrow \angle ABK = 9-2\alpha \Rightarrow$

$\angle BKH = 2\alpha$ по Т пифагора

$H_2B = 3x\ (\sqrt{4x^2+5x^2} = \sqrt{9x^2} = 3x) \Rightarrow$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

по Т синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R \Rightarrow$

$R = \frac{6}{\frac{6}{5}} = 5$

Ответ: $R = 5$

***Комментарий*.**

При правильном ответе решение содержит более одной ошибки и описки.

Оценка эксперта: 0 **баллов.**

§4. Материалы для практических занятий по оценке выполнения заданий с развернутым ответом

4.1. Задание 21.

Пример 1.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

21) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}^{(x-1}-10^{((x-1)(x-1)}=0$; $\frac{1}{(x-1)(x-1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=0$;

$1+3(x-1)-10(x-1)(x-1)=0$, если $x\neq 1$

$1+3x-3-10(x-1)^2=0$;

$-2+3x-10x^2+20x-10=0$;

$-10x^2+23x-12=0 \mid\cdot(-1)$;

$10x^2-23x+12=0$;

$D=b^2-4ac$; $D=529-4\cdot 10\cdot 12=529-480=49$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{23+49}{2\cdot 10}=\frac{72}{20}=3{,}6$; $x_2=\frac{23-49}{20}=-\frac{26}{20}=-1\frac{6}{20}^{(5}=-1{,}3$

Ответ: $-1{,}3$; $3{,}6$

Комментарий.

При нахождении корней квадратного уравнения допущена неверная запись. При наличии общей формулы для нахождения корней квадратного уравнения, записанной верно, не извлечен корень из дискриминанта, все дальнейшие вычисления (с этой ошибкой) выполнены верно. Вычислительная ошибка присутствует, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 2.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0{,}5$, $x=-\frac{1}{6}$.

21

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$$

$1+4x-12x^2=0$ ОДЗ: $x\neq 0$

$12x^2-4x-1=0$

$12x^2-6x+2x-1=0$

$(2x-1)(6x+1)=0$

$x=\frac{1}{2}=0{,}5 \lor x=-\frac{1}{6}$

Пр.: V V

Ответ: $0{,}5;\ -\frac{1}{6}$

Комментарий.

Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

21

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}^{|t}-10^{|t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0$ $t^2\neq 0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \quad |\cdot(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+4\cdot\overset{40}{1\cdot 10}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$

  $x=1{,}5$

- $x-1=-0{,}2$

  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

Комментарий.

Все этапы решения присутствуют, корни в правом столбце найдены верно. Неверную запись ответа можно рассмотреть как описку.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 4.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0,5$, $x=-\frac{1}{6}$.

№21.

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$

$\frac{1}{x}=t$

$t^2+4t-12=0$

$D=16+48=64$

$\left\{\begin{array}{l} t=\frac{-4+8}{2}=2 \\ t=\frac{-4-8}{2}=-6 \end{array}\right.$

$\frac{1}{x}=2$ или $\frac{1}{x}=-6$

$x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{6}$

Ответ: $\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$

Комментарий.

Все этапы решения присутствуют, корни найдены верно. Неверную запись ответа можно рассмотреть как неверное владение символикой (хочется надеяться, что учащийся хотел написать фигурные скобки).

Оценка эксперта: 1 балл.

4.2. Задание 22.

Пример 1.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

№ 22

1) Пусть работа, которую нужно сделать во всех случаях равна 1.

2) Пусть производительность труда Игоря - x, Паши - y, а Володи - z

3) Тогда! производительность труда Игоря и Паши = $x+y=\frac{1}{20}$ (ч)
Паши и Володи - $y+z=\frac{1}{21}$ (часа)
Володи и Игоря - $z+x=\frac{1}{28}$ (часа)

4) Решим систему уравнений!

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{20}-y$$

$$z=\frac{1}{21}-y$$

$$\frac{1}{20}-y+\frac{1}{21}-y=\frac{1}{28}$$

$$-2y=\frac{1}{28}-\frac{1}{20}-\frac{1}{21}$$

$$-2y=\frac{15-20-21}{420}$$

$$-2y=\frac{-26}{420}$$

$$y=\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{21}{420}-\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{8}{420}$$

$$z=\frac{1}{21}-\frac{13}{420}$$

$$z=\frac{20}{420}-\frac{13}{420}$$

$$z=\frac{7}{420}$$

5) Таким образом производительность всех мальчиков: $\frac{8}{420}+\frac{7}{420}+\frac{13}{420}=\frac{28}{420}$ - в час, а в минуту: $\frac{28}{420\cdot 60}$

6) Время за которое она выполнят работу:
$1 : \frac{28}{420\cdot 60}=\frac{420\cdot 60}{28}=\frac{60\cdot 60}{4}=900$ минут

Ответ: за 900 минут мальчики прокрасят забор, работая втроём.

***Комментарий*.**

Ход решения верный, ответ верный.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

№ 22

$И + П = 14$

$П + В = 15$

$В + И = 30$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{14} \\ y + z = \frac{1}{15} \\ z + x = \frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{1}{14} \\ y = \frac{1}{15} - z \\ x = \frac{1}{30} - z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15} - z + \frac{1}{30} - z = \frac{1}{14}$$

$$-2z + \frac{3}{30} = \frac{1}{14}$$

$$-2z = \frac{1}{14} - \frac{3}{30}$$

$$-2z = \frac{30-42}{420}$$

$$2z = \frac{12}{420}$$

$$z = \frac{12}{420} : 2 = \frac{12}{420} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{70}$$

$$y = \frac{1}{15} - \frac{1}{70} = \frac{70-15}{1050} = \frac{55}{1050}$$

$$x = \frac{1}{30} - \frac{1}{70} = \frac{70-30}{2100} = \frac{40}{2100} = \frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70} + \frac{55}{1050} + \frac{4}{210} = \frac{7}{210} + \frac{55}{1050} = \frac{1}{30} + \frac{55}{1050} = \frac{1050+1650}{31500} =$$

$$= \frac{2700}{31500} = \frac{27}{315} \text{ (ч)}$$

$$\frac{27}{315} \cdot \frac{60}{1} = \frac{1620}{315} = 5\frac{45}{315} = 5\frac{1}{7} \text{ (минут)}$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

***Комментарий*.**

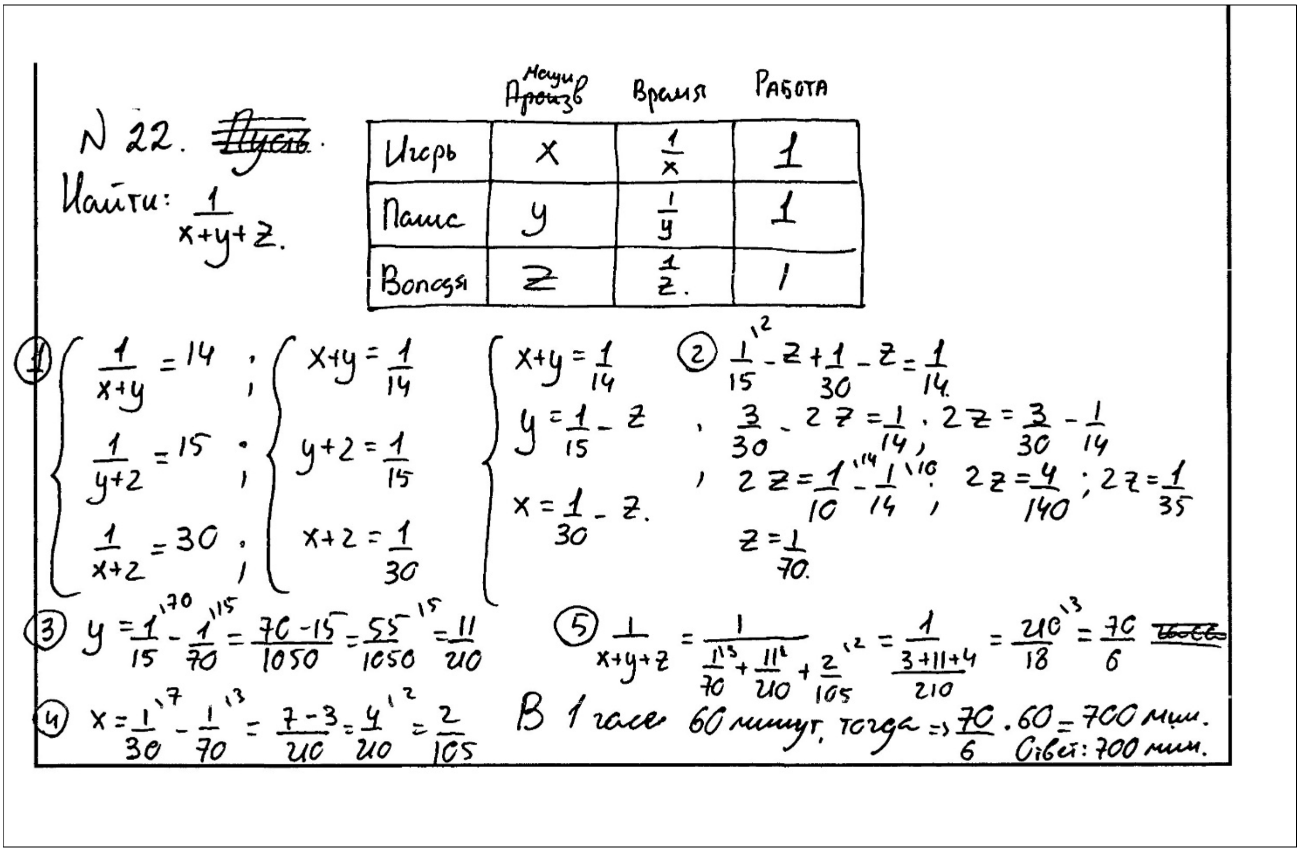
Логическая ошибка – выпускник перепутал производительность и время.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.



№ 22. ~~Пусть~~.

Найти: $\frac{1}{x+y+z}$.

	Мощн Произв	Время	Работа
Игорь	x	$\frac{1}{x}$	1
Паша	y	$\frac{1}{y}$	1
Володя	z	$\frac{1}{z}$	1

(1) $\begin{cases} \frac{1}{x+y}=14; \\ \frac{1}{y+z}=15; \\ \frac{1}{x+z}=30; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ x+z=\frac{1}{30} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z. \end{cases}$

(2) $\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$, $\frac{3}{30}-2z=\frac{1}{14}$, $2z=\frac{3}{30}-\frac{1}{14}$, $2z=\frac{1}{10}-\frac{1}{14}$, $2z=\frac{4}{140}$; $2z=\frac{1}{35}$; $z=\frac{1}{70}$.

(3) $y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}=\frac{11}{210}$

(4) $x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{7-3}{210}=\frac{4}{210}=\frac{2}{105}$

(5) $\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{\frac{1}{70}+\frac{11}{210}+\frac{2}{105}}=\frac{1}{\frac{3+11+4}{210}}=\frac{210}{18}=\frac{70}{6}$

В 1 часе 60 минут, тогда $\Rightarrow \frac{70}{6}\cdot 60=700$ мин.

Ответ: 700 мин.

***Комментарий*.**

Ход решения верный, ответ верный.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 4.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

22

	p	t	A
	$x+y$	$\frac{1}{x+y}$	1
	$y+z$	$\frac{1}{y+z}$	1
	$z+x$	$\frac{1}{z+x}$	1

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=14 \\ \frac{1}{y+z}=15 \\ \frac{1}{z+x}=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{14}-x \\ \frac{1}{14}-x+\left(\frac{1}{30}-x\right)=\frac{1}{15} \quad (*) \\ z=\frac{1}{30}-x \end{cases}$$

$$* \quad \frac{1}{14}-x+\frac{1}{30}-x=\frac{1}{15}$$

$$-2x=\frac{1}{15}-\frac{1}{30}-\frac{1}{14}$$

$$-2x=\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{1}{7\cdot2}$$

$$-2x=\frac{14-7-15}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$-2x=\frac{-8}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$x=\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$y=\frac{1}{2\cdot7}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{11}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$z=\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{11}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{18}=\frac{35}{2}=17{,}5 \text{ ч}$$

$= 1050$ мин

Ответ ~~[illegible]~~ 1050 мин

Комментарий.

Арифметическая ошибка на последнем шаге.

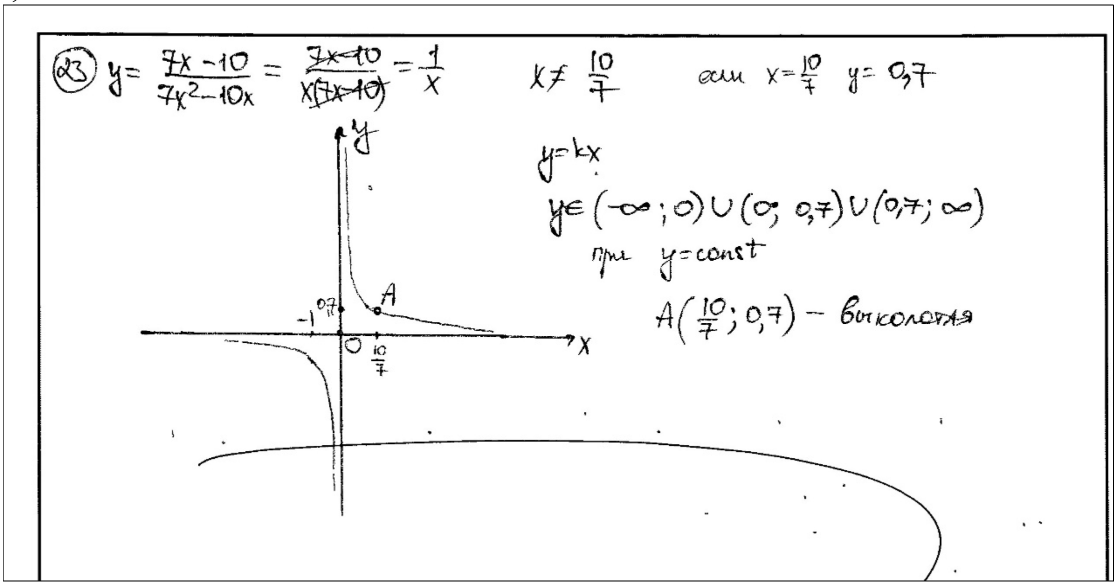
Оценка эксперта: 1 балл.

4.3. Задание 23.

Пример 1.

Постройте график функции $y = \dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 0,49.



Комментарий.

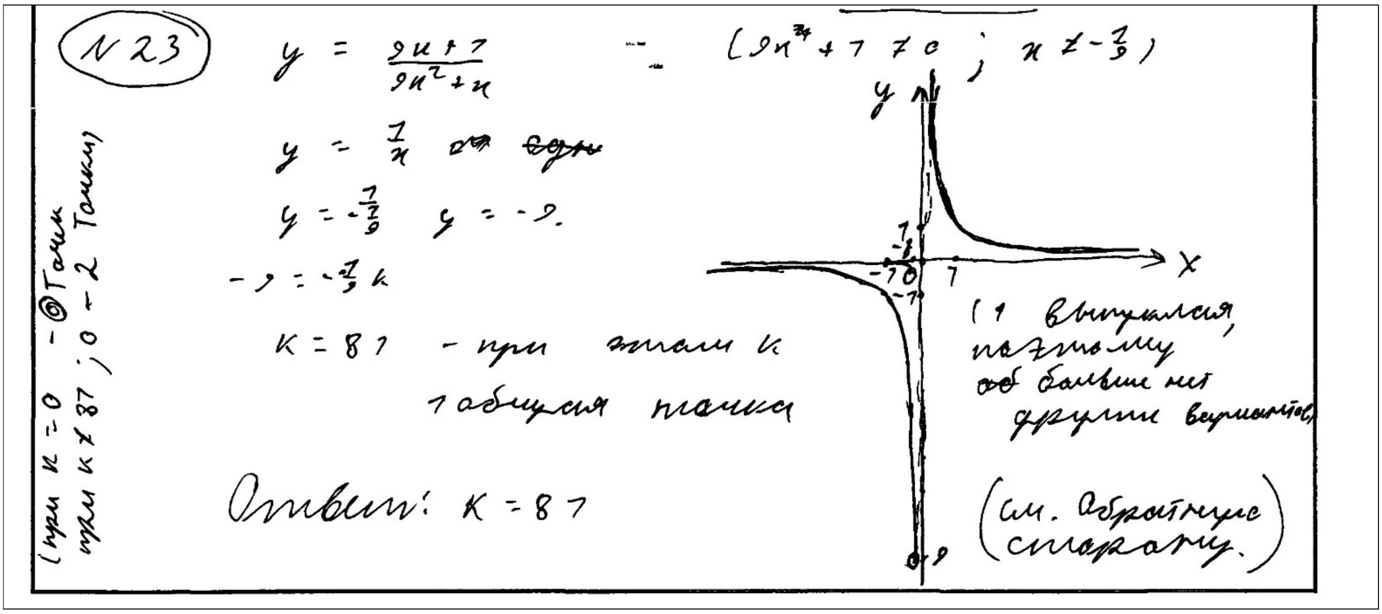
Форма графика соблюдена, выколотая точка обозначена верно. Вторая часть задания не выполнена.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 2.

Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.



Комментарий.

Форма графика соблюдена, выколотая точка обозначена верно. Вторая часть задания выполнена верно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3.

Постройте график функции $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях *k* прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

№ 23

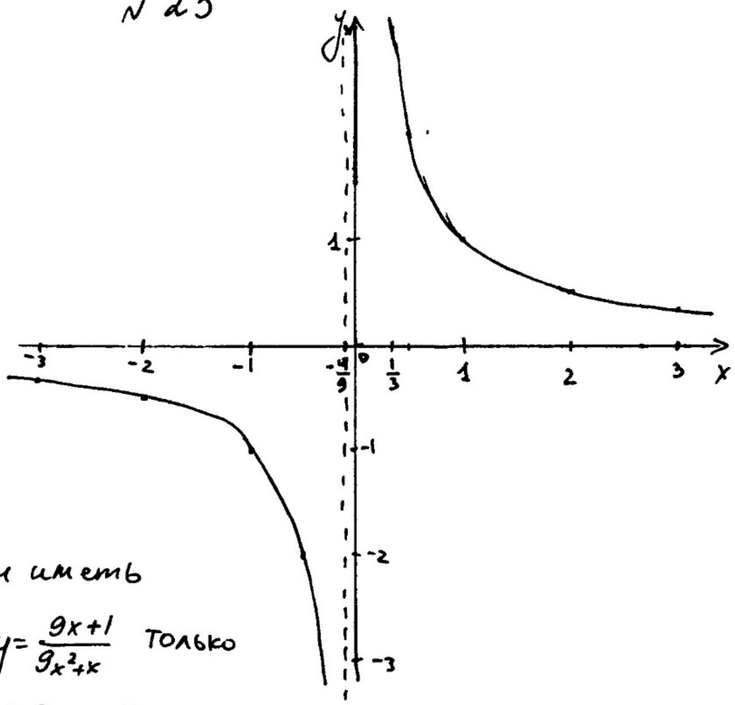
$y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \frac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \frac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ии $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (·) пересечение график ф-ии $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$. Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \mid \cdot (-9)$

$k = 81$.

Ответ: 81.

Комментарий.

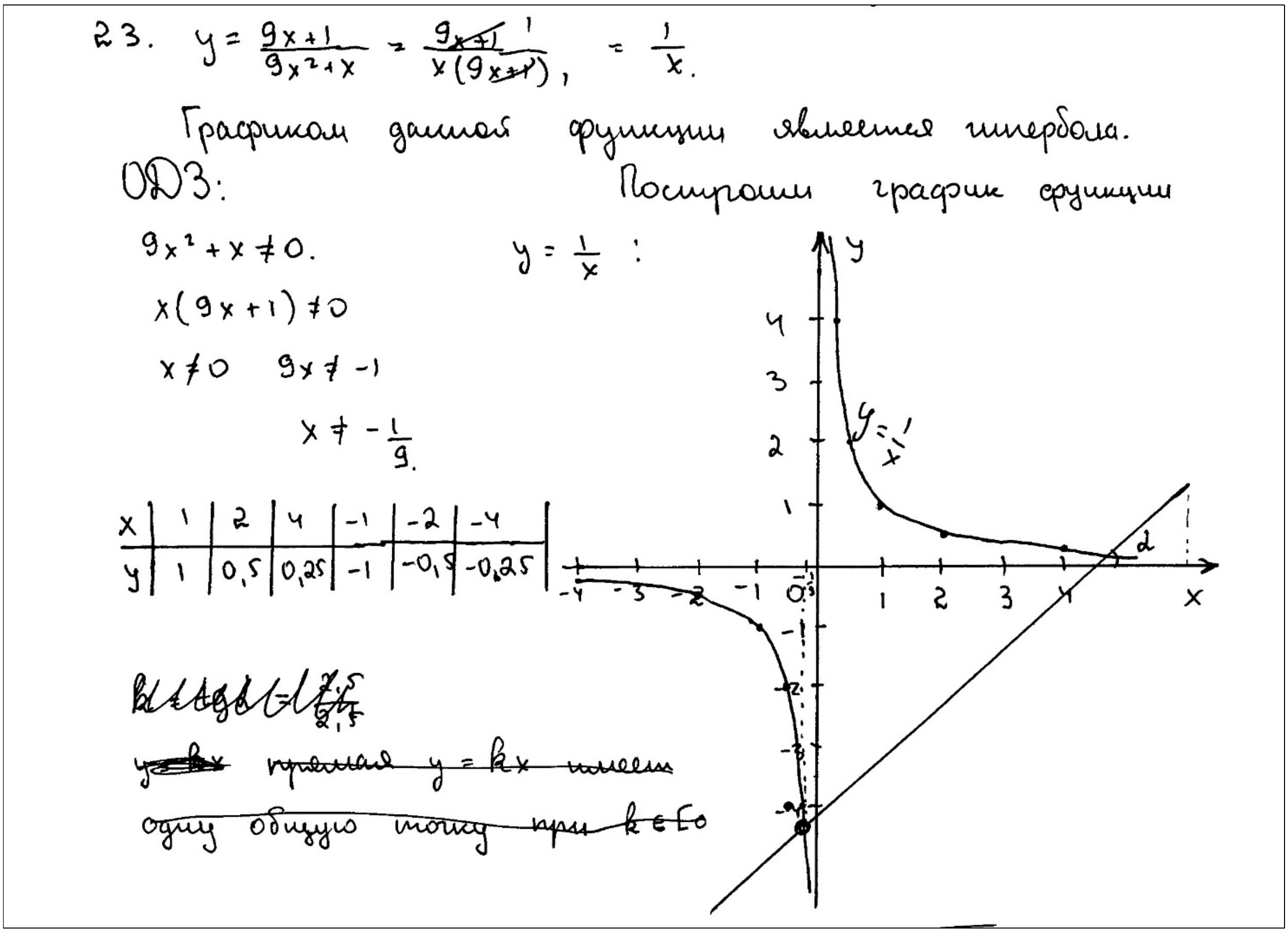
Несмотря на описание, по данному рисунку нельзя судить о верности графика.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 4.

Постройте график функции $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.



23. $y = \frac{9x+1}{9x^2+x} = \frac{\cancel{9x+1}\ 1}{x(\cancel{9x+1})} = \frac{1}{x}$.

Графиком данной функции является гипербола.

ОДЗ:

$9x^2+x\neq 0$.

$x(9x+1)\neq 0$

$x\neq 0 \quad 9x\neq -1$

$x\neq -\frac{1}{9}$.

Построим график функции $y=\frac{1}{x}$:

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	1	0,5	0,25	-1	-0,5	-0,25

~~у=kx прямая у = kx имеет одну общую точку при k∈[0~~

Комментарий.

График построен верно. Наличие некоторой прямой на графике не может быть поводом для снижения баллов.

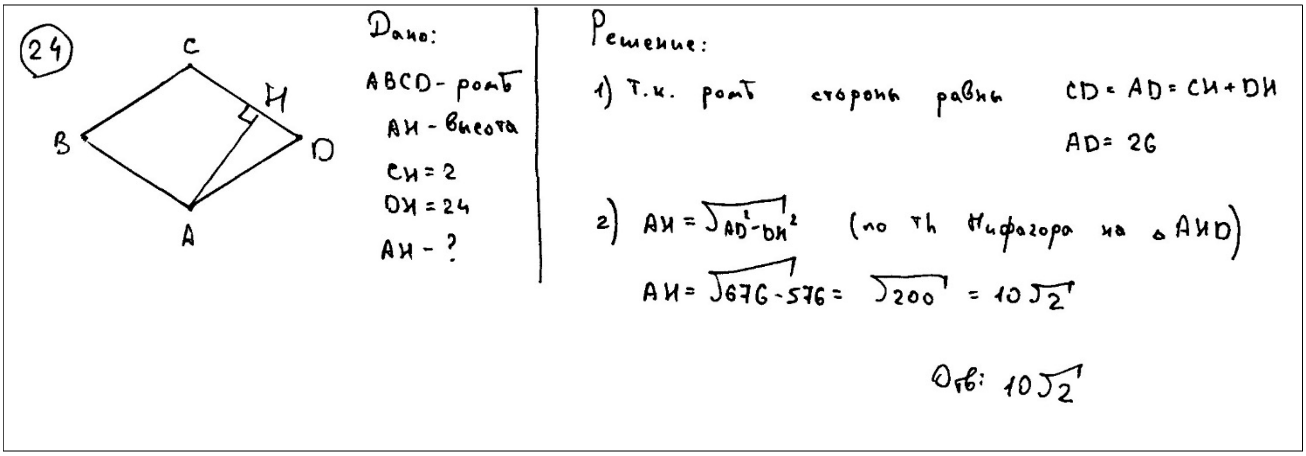
Оценка эксперта: 1 балл.

4.4. Задание 24.

Пример 1.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Комментарий.

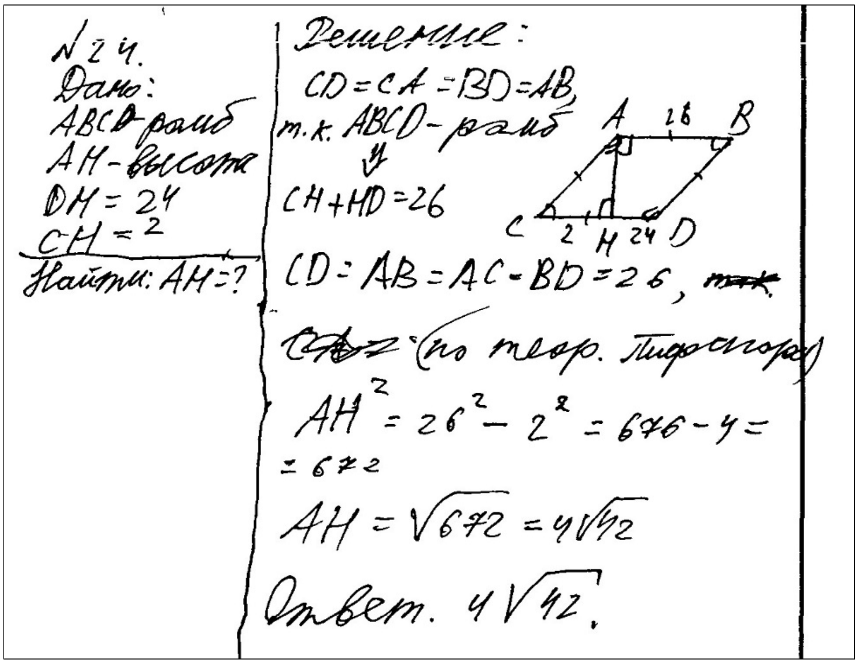
Арифметическая ошибка под знаком корня.

Оценка эксперта: 1 **балл.**

Пример 2.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



№24.
Дано:
ABCD-ромб
AH-высота
DH = 24
CH = 2
Найти: AH=?

Решение:
CD=CA=BD=AB,
т.к. ABCD-ромб
$\Downarrow$
CH+HD=26
CD=AB=AC=BD=26, ~~так~~
~~CH=~~ (по теор. Пифагора)
$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 =$
$= 672$
$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$
Ответ. $4\sqrt{42}$.

Комментарий.

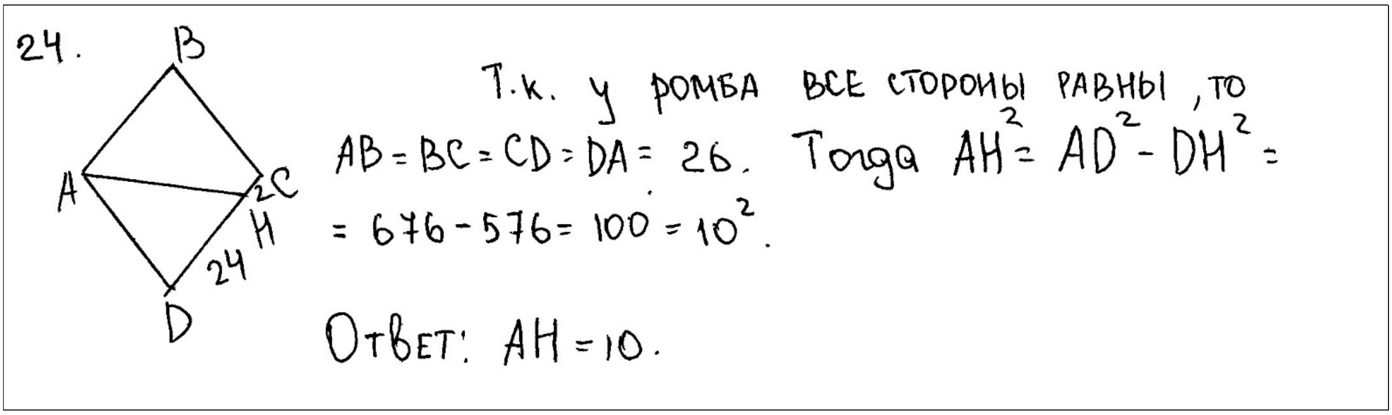
Учащийся решает свою задачу: не учтен порядок расположения отрезков.

Оценка эксперта: 0 **баллов.**

Пример 3.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



24.
Т.к. у ромба все стороны равны, то
AB = BC = CD = DA = 26. Тогда $AH^2 = AD^2 - DH^2 =$
$= 676 - 576 = 100 = 10^2$.
Ответ: AH = 10.

Комментарий.

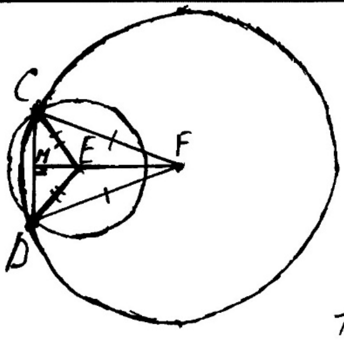
Задача выполнена верно, не смотря на изображение перпендикуляра *AH*.

Оценка эксперта: 2 **балла.**

4.5. Задание 25.

Пример 1.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.



Дано: C и D - точки пересечения окружностей;
E и F по одну сторону от CD.
Док-ть: $CD \perp EF$

Док-во:

1) Проведём радиусы CE; ED; CF и FD.
2) Рассмотрим тр-к CDE. Радиусы равны =>
=> тр-к равнобедренный.
3) Проведём медиану EM. В равнобедренном тр-нике медиана, проведённая к основанию явл. высотой => EM - высота.
4) Рассмотрим тр-к CFD. Радиусы равны =>
=> тр-к равнобедренный => медиана, проведённая к основанию явл. высотой. =>
=> FM - медиана и высота.
5) Высоты EM и FM лежат на одной прямой с отрезком FE; Основание CD лежит на прямой CD.
6) Так как высоты тр-ков $\perp$ к основанию CD и лежат на одной прямой с EF, то $EF \perp CD$.

ч.т.д.

Комментарий.

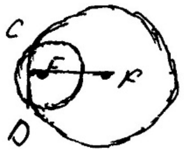
Неточность в обосновании (см. пункт 5)

Оценка эксперта: 1 **балл.**

Пример 2.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

№25



Дано: окружность с центром в точке E, окружность с центром в точке F, точка C, D - точки пересечения окружностей

Доказать: $EF \perp CD$

~~1) рассмотрим треугольник CFD.~~

2) Пусть пересечение EF и CD - H, а пересечение с окружностью

смотри на обороте —>

3) Так как центры окружностей находятся на одной прямой, CD их общая хорда, а ~~EF~~ FL - радиус одной из окружностей, то FH делит CD пополам.

4) Рассмотрим треугольник CFD, FH - медиана CD,

5) FD = FC, т.к. они являются радиусами окружности

6) следовательно △ CFD - равнобедренный, следовательно FH также является высотой, следовательно $EF \perp CD$

Комментарий.

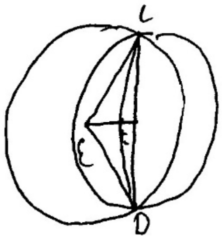
Не доказано, почему FH делит CD пополам.

Оценка эксперта: 0 **баллов.**

Пример 3.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

2 5.



Дано: окр. ц. E, окр. ц. F
окр. пересекаются в C и D;
Док-ть: $CD \perp EF$

Док-во.

1). Проведем радиусы EC, ED, FC, FD
EC = ED (радиусы) => E равноудалена от C и D
FC = FD (радиусы) => F равноудалена от C и D
=> EF – сер. перпендикуляр к CD => $EF \perp CD$ ч.т.д.

Комментарий.

Классическое доказательство данного факта.

Оценка эксперта: 2 **баллов.**

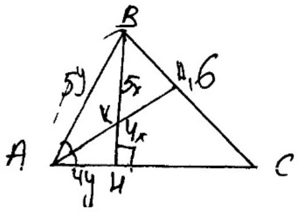
4.6. Задание 26.

Пример 1.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

Б26.



Дано: $\triangle ABC$, бис $\angle A$ делит BH $(5:4)$, $BC=6$

Найти: R.

Б26. AA_1 – бис $\Rightarrow$ $\frac{AB}{BK} = \frac{AH}{HK} = \frac{5}{4}$ $AB=5y$, $AH=4y$ $\Rightarrow$ $BH=3y$ и $BH=9x$

$9x=3y$ $\quad$ $3x=y$ $\quad$ $2R = \frac{a}{\sin\angle A} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{6}{\sin\angle A}$ $\quad$ $\sin\angle A = \frac{3y}{5y} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Комментарий.

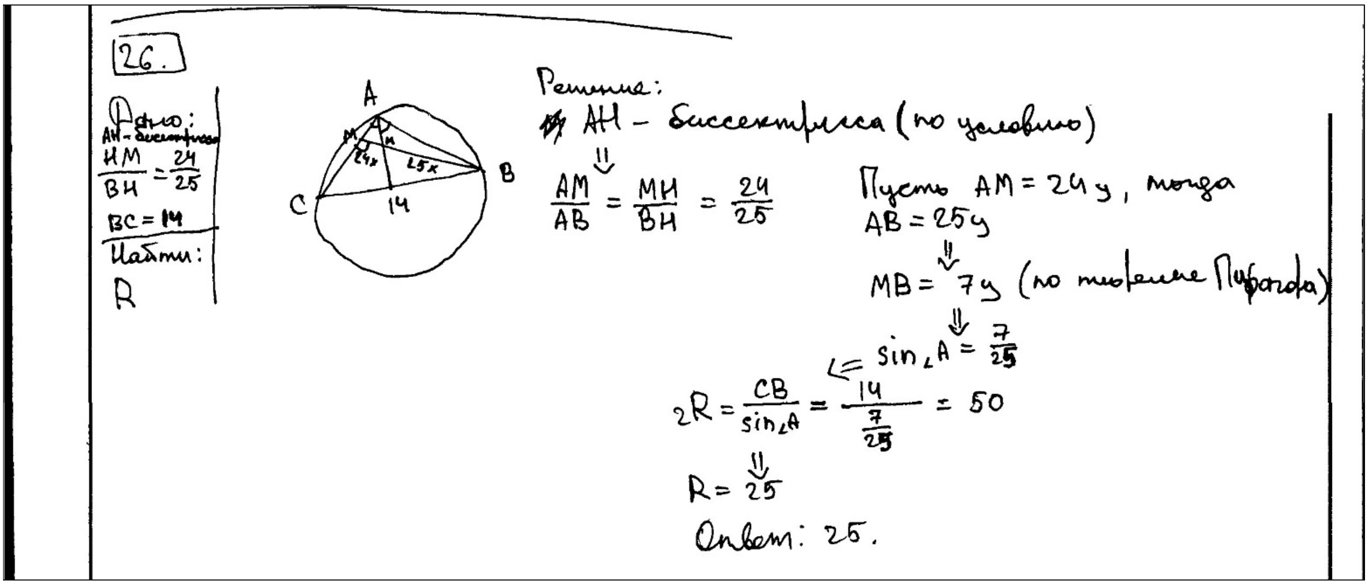
Решение незаконченное: формула для нахождения радиуса выписана, все компоненты найдены, но не получен итоговый результат.

Оценка эксперта: 1 **балл.**

Пример 2.

Биссектриса A, треугольника ABC делит высоту BH в отношении 25:24, считая от вершины. BC равно 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.



26.

Дано:

AH – биссектриса

$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$

$BC = 14$

Найти:

R

Решение:

AH – биссектриса (по условию)

$\Downarrow$

$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда $AB = 25y$

$\Downarrow$

$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)

$\Downarrow$

$\sin\angle A = \frac{7}{25}$

$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$

$\Downarrow$

$R = 25$

Ответ: 25.

Комментарий.

Решение верное.

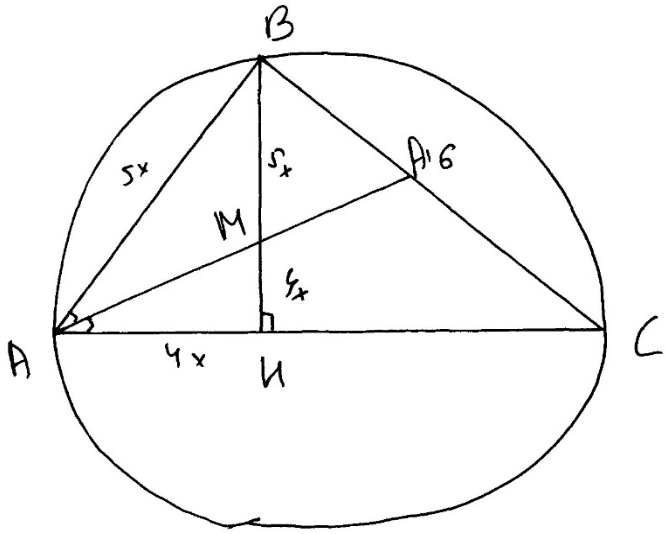
Оценка эксперта: 2 **балла.**

Пример 3.

Биссектриса угла A, треугольника ABC делит высоту BH в отношении 5:4, считая от вершины. BC равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

26.



Дано:

Окр$(O;R)$

$\triangle ABC$

$BC = 6$

AA_1 - биссектриса

BH - высота.

$BM:MH = 5:4$.

Найти:

R

Решение:

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{2}\sin A} = \frac{3}{\sin A}.$$

1. Рассмотрим $\triangle ABH$:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{9x}{AB} = \frac{9\cancel{x}}{5\cancel{x}} = 1{,}8$$ (т.к. AM делит основание, в том же отношении, что и боковые стороны) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin A} = \frac{3}{1{,}8} = 1\tfrac{2}{3}$$

Ответ: $R = 1\tfrac{2}{3}$.

Комментарий.

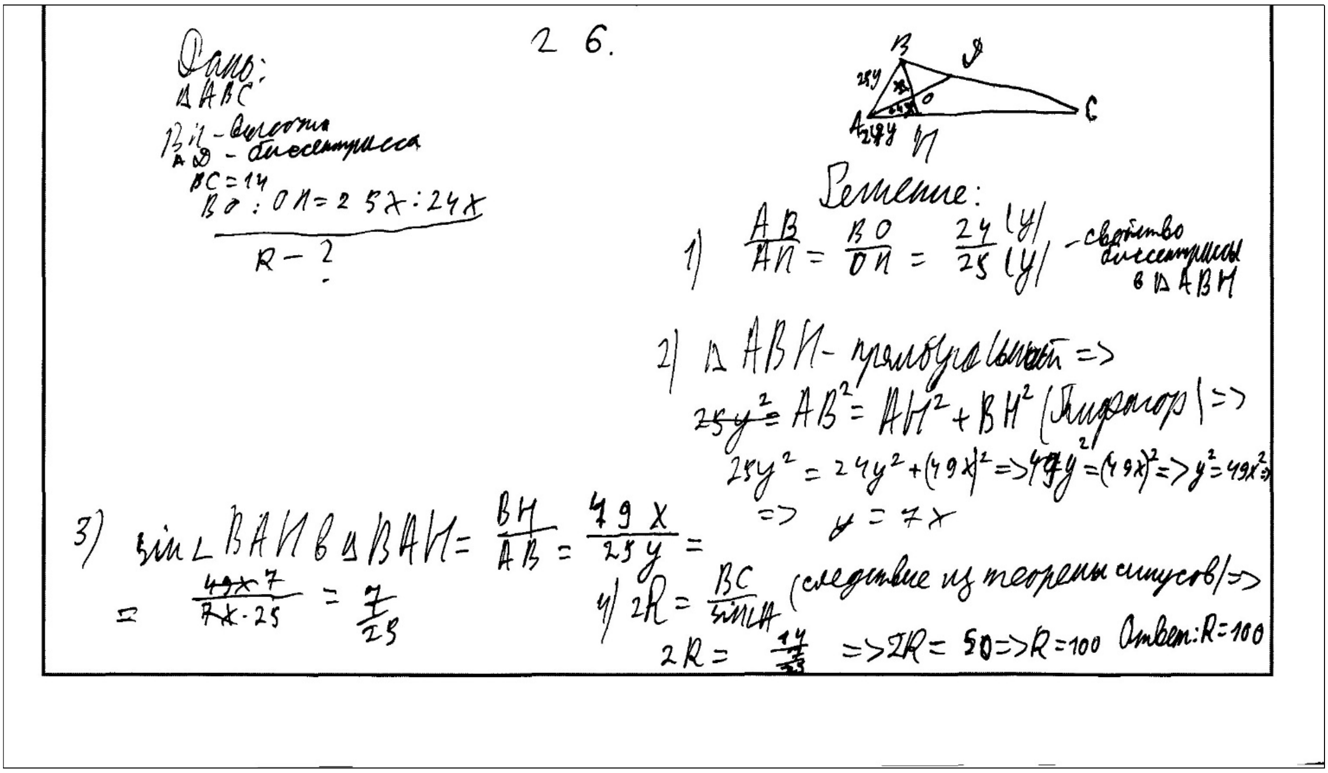
Логическая ошибка, неверно применено свойство биссектрисы.

Оценка эксперта: 0 **баллов.**

Пример 4.

Биссектриса A, треугольника ABC делит высоту BH в отношении 25:24, считая от вершины. BC равно 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.



2 6.

Дано:
ΔABC
BH - высота
AO - биссектриса
$BC=14$
$BO:OH=25x:24x$

R - ?

Решение:

1) $\frac{AB}{AH}=\frac{BO}{OH}=\frac{24(y)}{25(y)}$ - свойство биссектрисы в ΔABH

2) ΔABH - прямоугольный =>
$\cancel{25y^2}\ AB^2=AH^2+BH^2$ (Пифагор) =>
$25y^2=24y^2+(49x)^2 \Rightarrow 49y^2=(49x)^2 \Rightarrow y^2=49x^2 \Rightarrow y=7x$

3) $\sin\angle BAH$ в $\Delta BAH=\frac{BH}{AB}=\frac{49x}{25y}=\frac{49x}{7x\cdot 25}=\frac{7}{25}$

4) $2R=\frac{BC}{\sin A}$ (следствие из теоремы синусов) =>
$2R=\frac{14}{\frac{7}{25}} \Rightarrow 2R=50 \Rightarrow R=100$ Ответ: $R=100$

Комментарий.

Арифметическая ошибка.

Оценка эксперта: 1 **балл.**

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы эксперта:

а) прочесть все 6 решений подряд и составить свое предварительное мнение об оценках;

б) вернуться к началу и прочесть все решения еще раз, на этот раз выставляя свои собственные оценки, в соответствии с критериями оценивания;

в) после этого сверить свои оценки с предлагаемыми оценками в таблице ответов;

г) при наличии расхождений в оценках вернуться к спорным моментам и обсудить их или с проводящим семинар по подготовке экспертов, или с руководителем региональной экспертной группы, или с консультантом федеральной предметной группы.

В каждой части приложена таблица ответов.

Задание 21 с развернутым ответом повышенного уровня сложности. Задание для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1.5$, $x=0{,}8$.

№21

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$ $\qquad y=\frac{1}{x-1}$ $(x\neq 1)$

$y^2+3y-10=0$; $D=9+40=49$; $x_{1,2}=\frac{-3\pm 7}{2}$

$x_1=-5$; $x_2=2$

Ответ: $0{,}8$; $1{,}5$

1) $\frac{1}{x-1}=-5$ $\qquad$ 2) $\frac{1}{x-1}=2$

$1=-5x+5$ $\qquad$ $1=2x-2$

$x=\frac{4}{5}=0{,}8$ $\qquad$ $x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1.5$, $x=0{,}8$.

№ 21

$x-1)$ $\quad x^2-2x+1$ $\quad (x-1)^2$

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0 \quad \Big|\cdot(x-1)^2$

$1+(x-3)-10x^2+20x-10$

$-10x^2+21x-12=0 \;\Big|:(-1)$

$10x^2-21x+12=0$

$D=b^2-4ac$

$D=441-4\cdot(10)\cdot(12)$

$D=441-480=-39$

Решения нет

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0.5$, $x=-\frac{1}{6}$.

N 21

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0; \Big| \cdot x^2$

$x \neq 0$

$1+4x-12x^2=0;$

$12x^2-4x-1=0;$

$D_1=\frac{4+\cancel{12}}{\cancel{12}}=\frac{16}{12}=$ $\quad D_1=k^2-ac$

$D_1=4+12=16.$

$D_1>0$, уравнение имеет 2 корня:

$x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$

$x=\frac{2\pm 4}{12}$

$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=-\frac{1}{6}. \end{array}\right.$

Ответ: $0{,}5; -\frac{1}{6}$.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1.5$, $x=0{,}8$.

21. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}=10$

$\frac{1+3(x-1)}{(x-1)^2}=10$

$\frac{1+3x-3}{(x-1)^2}=10$

$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=10$

$3x-2=10(x^2-2x+1)$

$3x-2=10x^2-20x+10$

$10x^2-20x+10-3x+2=0$

$10x^2-23x+12=0$

$D=b^2-4ac=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49>0 \Rightarrow 2$ различных корня.

$x_{1,2}=-\frac{b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{23\pm7}{20}$

$\frac{23+7}{20}=\frac{30}{20}=1,5$

$\frac{23-7}{20}=\frac{16}{20}=0,8$

Ответ: $x_1=0,8$

$x_2=1,5.$

Оценка эксперта: ____________________

Задание 21.

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	1	0	2	2

Задание 22 с развернутым ответом повышенного уровня сложности. Задание для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

№22

Пусть Игорь – x, Паша – y, Володя – z. Составим таблицу.

	v	t	A
x, y	$\frac{1}{20}$ з/ч.	20 ч	1 з.
y, z	$\frac{1}{21}$ з/ч	21 ч	1 з
x и z	$\frac{1}{28}$ з/ч	28 ч	1 з

Составим систему

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{20}-y \\ y=\frac{1}{21}-z \\ z=\frac{1}{28}-x \end{cases}$$

Составим и решим уравнение

$$x=\frac{1}{20}-\left(\frac{1}{21}-\left(\frac{1}{28}-x\right)\right)$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{1}{21}+\frac{1}{28}-x$$

$$2x=\frac{16}{420}$$

$$2x=\frac{4}{105}$$

$$x=\frac{2}{105}$$

Т.к. $y+z=\frac{1}{21}$, то

$$x+y+z=\frac{1}{21}+\frac{2}{105}.$$

$$x+y+z=\frac{7}{105} \text{ з/ч.}$$

$$t=\frac{A}{v}$$

$$t=\frac{1}{\frac{7}{105}}$$

$$t=15 \text{ ч}$$

Ответ: 15 часов.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

$\boxed{22.}$

Буквами И, П и В я обозначил соответственно скорости Игоря, Паши и Володи (в $\frac{\text{заборов}}{\text{час}}$)

$\text{И} + \text{П} = \frac{1}{20}$; | $\text{П} + \text{В} = \frac{1}{21}$; | $\text{В} + \text{И} = \frac{1}{28}$;

$\Downarrow$

$20\text{И} + 20\text{П} = 1$; | $21\text{П} + 21\text{В} = 1$; | $28\text{В} + 28\text{И} = 1$;

$\Downarrow$

$20\text{П} = 1 - 20\text{И}$ $\qquad$ $28\text{И} = 1 - 28\text{В}$

$\Downarrow$

$\text{И} = \frac{1}{28} - \text{В}$

$20\text{П} = 1 - 20(\frac{1}{28} - \text{В})$

$20\text{П} = 1 - \frac{5}{7} + 20\text{В}$

$20\text{П} = 20\text{В} + \frac{2}{7}$

$\Downarrow$

$\text{П} = \text{В} + \frac{1}{70}$ $\qquad$ $21\text{П} + 21\text{В} = 1$

$21(\text{В} + \frac{1}{70}) + 21\text{В} = 1$

$21\text{В} + 21\text{В} = 1 - \frac{21}{70}$

$42\text{В} = 0,7$

$21\text{В} = 0,35$

$\Downarrow$

$21\text{П} = 1 - 0,35$

$21\text{П} = 0,65$

$\Downarrow$

$\frac{\text{В}}{\text{П}} = \frac{0,35}{0,65} = \frac{7}{13}$

$3\text{В} = 0,05$

$3\text{В} = \frac{1}{20}$

$\text{И} + \text{П} = \frac{1}{20}$

$\text{И} + \text{П} = 3\text{В}$

Пусть $x = \frac{\text{В}}{7}$, тогда:

$\text{П} = 13x$; $21x = 0,05$

$\text{И} + 13x = 3 \cdot 7x$

$\text{И} = 21x - 13x$

$\text{И} = 8x$

$\Downarrow$

Скорость всех трех мальчиков вместе:

$7x + 8x + 13x = 28x$

$\Downarrow$

За три часа они покрасят:

$84x = 21x \cdot 4 = 0,05 \cdot 4 = 0,2$ (забора)

$1 = 28x \cdot 15$

$\Downarrow$

Они покрасят забор за 15 ч

$15 \text{ ч} = 15 \cdot 60 = 900$ мин

Ответ: за 900 минут

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 700 минут.

№ 22

$v_{ИП} = \frac{1}{14}$; $v_{ПВ} = \frac{1}{15}$; $v_{ВИ} = \frac{1}{30}$ – скорости.

$\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{6}{35} \Rightarrow t = \frac{35}{6}$ ч – но это удвоенное время т/к учли каждого дважды $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{35}{3}$ ч $= 11\frac{2}{3}$ (ч) $=$ 11 ч 40 мин

Ответ: 11 ч 40 мин. или 700 мин.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

(22)

	A	v	t
И + П.	1	$\frac{1}{20}$	20
П + В.	1	$\frac{1}{21}$	21.
В + И.	1	$\frac{1}{28}$	28
И+В+П.	1.	$\frac{1}{x}$	x

Составлю и решу уравнение:

1) $\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{x}$,

$\frac{21+20+15}{420} = \frac{1}{x}$,

$x(41+15) = 420 \cdot 1$,

$56x = 420$,

$x = \frac{420}{56} = 7,5$ (ч).

$7,5 \times 60 = 450,0$

2) 7,5 часов $= 7,5 \cdot 60$ (мин.) $= 450$ (мин.).

Ответ: 450 минут.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 5.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

22. Пусть:

Игорь — t_1 - время Игоря — $t_1 + t_2 = 20$ — 1) $t_2 = 20 - t_1$

Паша — t_2 - время Паши — $t_2 + t_3 = 21$ — $20 - t_1 + t_3 = 21$ — $t_3 = 1 + t_1$

Володя — t_3 - время Володи — $t_1 + t_3 = 28$ — $t_1 + 1 + t_1 = 28$

$2t_1 = 27$

$t_1 = 13,5$, тогда

$t_2 = 6,5$

$t_3 = 14,5$

2) Тогда $14,5 + 6,5 + 13,5 = 34,5$ /

3). Т.к. они работают втроем $34,5 \cdot 3 = 11,5$

11,5 часов = 690 минут

Ответ: 690 минут = 11,5 часов

Оценка эксперта: ____________________

Задание 22.

Задание	1	2	3	4	5
Оценка эксперта	1	2	0	0	0

Задание 23 с развернутым ответом повышенного уровня сложности. Задание для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

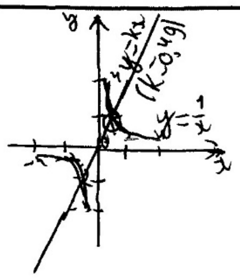
Постройте график функции: $y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 0,49.

№23.

$y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$ $y=\dfrac{1}{x}$, $7x^2-10x\neq 0$ $x\neq 0$ и $x\neq\dfrac{10}{7}$

$y\neq 0$ и $y\neq 0,7$

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	4
y	-0,25	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	0,25



$y=kx$

$k=\dfrac{y}{x}$

$k=\dfrac{10}{7}$ 0,7

$k=0,49$

Ответ: при $k=0,49$ имеется 1 точка.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Постройте график функции: $y = \dfrac{7x - 10}{7x^2 - 10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 0,49.

(23) $y = \dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$;

ОДЗ: $7x^2 - 10x \neq 0$.

$x(7x-10) \neq 0$.

$x \neq 0$ или $7x - 10 \neq 0$.

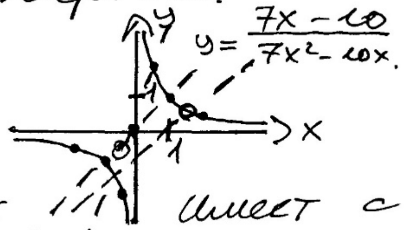
$x \neq \frac{10}{7}$.

$y = \dfrac{\cancel{(7x-10)}}{x\cancel{(7x-10)}}$;

$y = \frac{1}{x}$ – обратная пропорциональность. График – гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях.

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
y	-0,5	-1	-2	2	1	0,5

$y = kx$.



Ответ: не существует таких значений k, при которых $y = kx$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку.

Оценка эксперта: ____________________

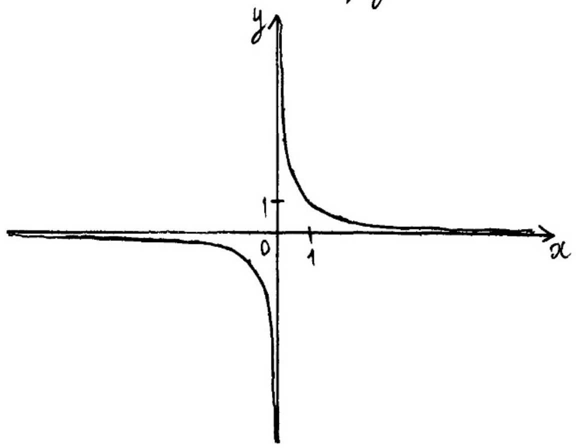
Задание 3.

Постройте график функции: $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.

№23.

$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$, — это обратная пропорциональность, график: гипербола, расположенная в I и III координатных четвертях.

x	1	-1	2
y	1	-1	$\frac{1}{2}$



$y = kx$, — это прямая пропорциональность, график. прямая проходящая через точку с коорд. (0;0).

Приравнивая графики, получаем:

$kx = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$,

$kx = \dfrac{9x+1}{(9x+1)\cdot x}$,

$kx = \dfrac{1}{x}$,

$kx^2 = 1$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{k}, \\ x = -\frac{\cancel{k}1}{k}, \end{array}\right.$

Таким образом, при $k \neq 0$, имеется 2 возм. значения „x", а при $k = 0$, — ни одного.

Ответ: нет таких „k".

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Постройте график функции: $y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 0,49.

523

$y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$

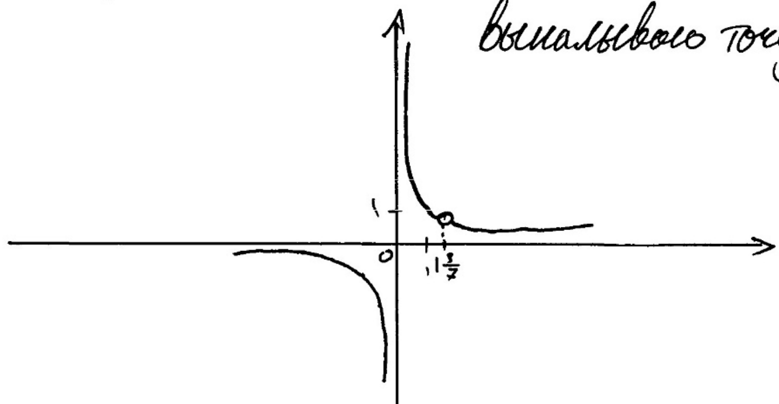
$y=\dfrac{7x-10}{x(7x-10)}$

$D(y)=(\infty;0)\cup(0;\frac{10}{7})\cup(\frac{10}{7};+\infty)$

x	1	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

x	-1	-2	-3
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

строю график (гипербола); выкалываю точку $(\frac{10}{7};\frac{7}{10})$,



$y=kx$ имеет 1 общ. точку если проходит через т. $(\frac{10}{7};\frac{7}{10})$

$\frac{7}{10}=k\cdot\frac{10}{7} \Rightarrow k=\frac{7\cdot7}{10\cdot10}=0{,}49$

Ответ: 0,49

Оценка эксперта: ____________________

Задание 5.

Постройте график функции: $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.

23) . $y=\frac{9x+1}{9x^2+x}$ $D(y)=R$, кроме 0 и $-\frac{1}{9}$.

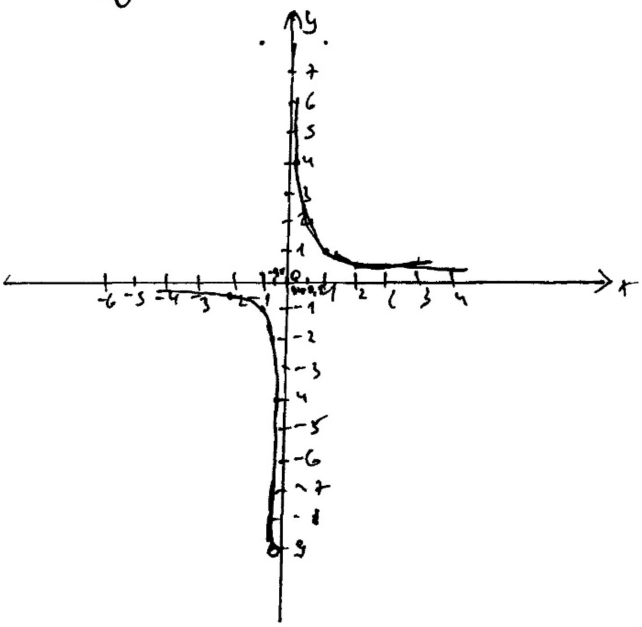
$y=\frac{9x+1}{x(9x+1)}$

$y=\frac{1}{x}$, при $x\neq 0$, $x\neq -\frac{1}{9}$.

Графиком ф-ии является гипербола.

Составим таблицу.

x	y
1	1
−1	−1
0,5	2
−0,5	−2
0,25	4
−0,25	−4
2	0,5
−2	−0,5



Прямая $y=kx$ имеет с графиком ф-ии ровно одну общую точку, когда т-ка $(-\frac{1}{9}; -9)$ принадлежит прямой

Если $x=-\frac{1}{9}$, $y=-9$, то

$-9=-\frac{1}{9}k$

$k=9$

При $k=9$, прямая $y=kx$ ~~принадлежит~~ имеет с графиком функции $y=\frac{9x+1}{9x^2+x}$ ровно одну общую точку.

Ответ: 9.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 23.

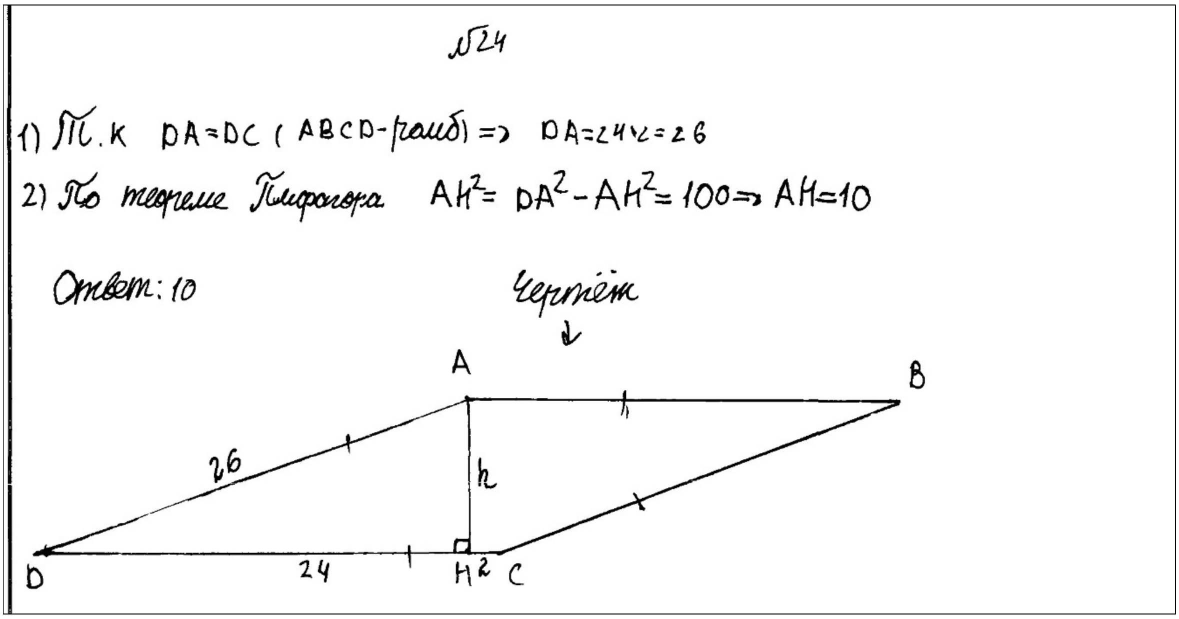
Задание	1	2	3	4	5
Оценка эксперта	0	1	0	2	1

Задание 24 с развернутым ответом повышенного уровня сложности. Задание для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



№24

1) Т.к $DA=DC$ ($ABCD$-ромб) $\Rightarrow DA=24+2=26$

2) По теореме Пифагора $AH^2=DA^2-AH^2=100 \Rightarrow AH=10$

Ответ: 10

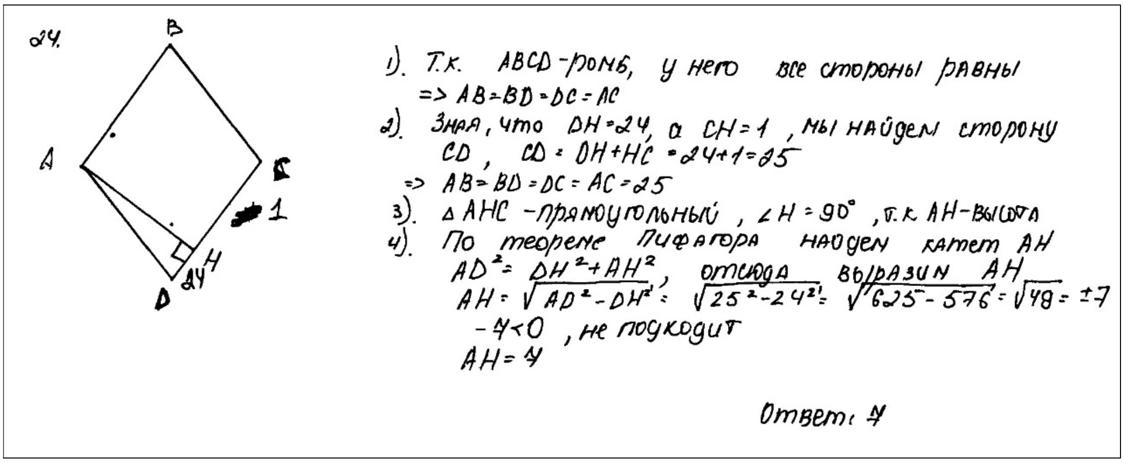
Чертёж

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



24.

1). Т.к. $ABCD$-ромб, у него все стороны равны $\Rightarrow AB=BD=DC=AC$

2). Зная, что $DH=24$, а $CH=1$, мы найдем сторону CD, $CD=DH+HC=24+1=25$ $\Rightarrow AB=BD=DC=AC=25$

3). $\triangle AHC$ -прямоугольный, $\angle H=90^\circ$, т.к. AH-высота

4). По теореме Пифагора найдем катет AH

$AD^2=DH^2+AH^2$, отсюда выразим AH

$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{625-576}=\sqrt{49}=\pm 7$

$-7<0$, не подходит

$AH=7$

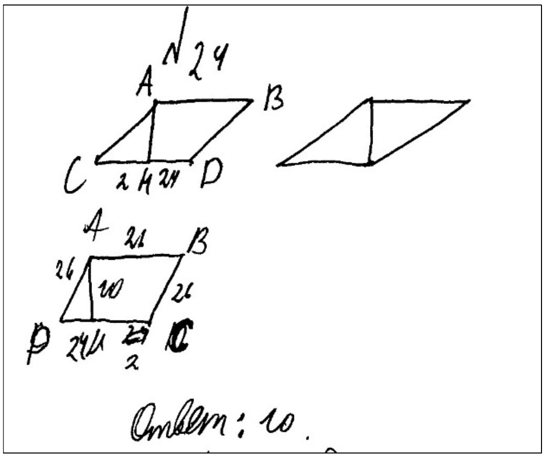
Ответ: 7

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.

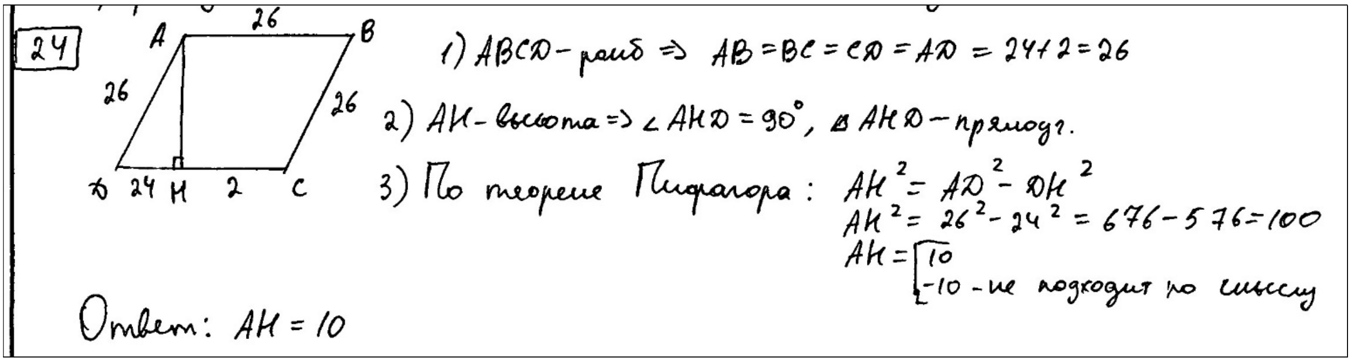


Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Оценка эксперта: ____________________

Задание 24.

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	2	1	0	2

Задание 25 с развернутым ответом повышенного уровня сложности. Задание для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

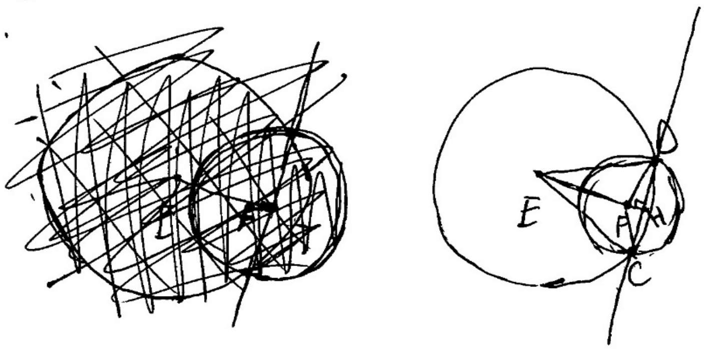
Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, центры *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямая *CD* перпендикулярна прямой *EF*.

№ 25

Дано: окружности с центрами E и F, пересекаются в точках C и D; E, F лежат по одну сторону от прямой CD

Док-ть: $CD \perp EF$

Решение:



ΔCED и ΔCFD - равнобедренные т.к. EC, ED, FD, FC - радиусы

CD - хорда

Проведём высоту EH и FH к прямой CD

EH и FH - расстояние от центра до хорды образует прямой угол и является медианой.

ΔECD и ΔCFD равнобедренные и $\angle CED$ и $\angle CFD$ опираются на одну и ту же дугу

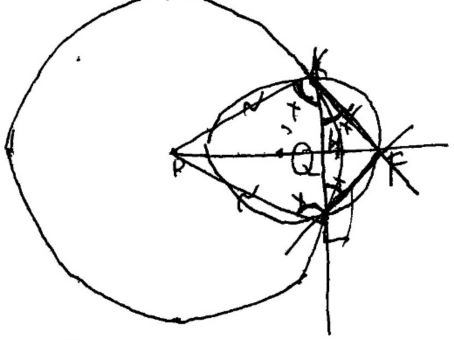
EH - серединный перпендикуляр. точка F лежит на серединном перпендикуляре и равноудалена от концов хорды. Т.к. F лежит на EH и образует с CD 90° $CD \perp EF$ ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, центры *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямая *CD* перпендикулярна прямой *EF*.

25.



1) Рассмотрю $\triangle PKL$ – он р/б по определению т.к. $PK = PL$ как радиусы окружности с центром P => по св-ву р/б тр-ка $\angle PKL = \angle PLK$

2) Провожу $LF \parallel PK$, $KF \parallel PL$

Значит $\angle PKL = \angle KLF$ как накр/лежащие при пар. прямых PK и LF и сек KL =>

=> $\angle KLF = \angle PLK$ => LQ – бис-са $\triangle PLK$

$\angle LKF = \angle PLK$ => $\angle LKF = \angle PKL = \angle LKF$ => $\triangle KFL$ – р/б по св-ву.

3) $\triangle PKF = \triangle PLF$ по 3 сторонам:

- $PK = PL$ как радиусы
- $KF = LF$ (пункт 2)
- PF – общая

=> $\angle KPF = \angle LPF$

4) Из п.3 следует, что PH – бис-са $\triangle PKL$. Из п.1 – $\triangle PKL$ – р/б.: по св-ву р/б тр-ка биссектриса проведенная к основанию, является высотой => $\angle PHK = 90°$, а по условию $Q \in PH$ => $PQ \perp KL$, ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

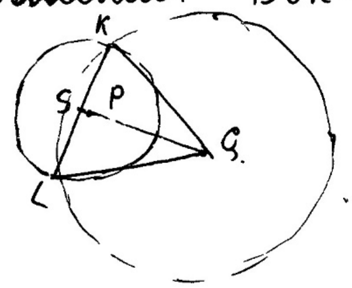
25. Дано: Док-во:

окр $(P; R_1)$

окр $(Q; R_2)$

Док-ть

$PQ \perp KL$



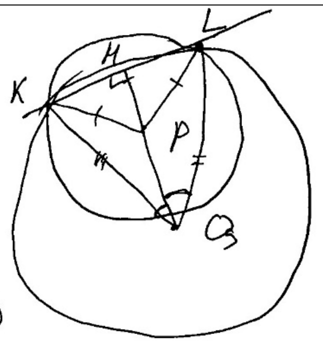
1. Проведем $KQ = LQ$ - радиусы окр.
$\triangle KQL$ - р/б. т.к $KQ = LQ \Rightarrow$
$\angle LKQ = \angle KLQ$.
2. Доведем QP до отрезка KL
3. т.к (·)P - центр окр (·)K и (·)L равноудалены от нее (радиусы). Точка P лежит на отрезке QS $\Rightarrow$
(·)K и (·)L равноудалены от (·)S. $\Rightarrow$
$KS = SL \Rightarrow QS$ - медиана.
4. В равнобедренном $\triangle$ медиана = высоте и биссектрисе $\Rightarrow QS$ - высота $QS \perp KL$ - основание.
QP лежит на $QS \Rightarrow QP \perp KL$.
Ч.Т.Д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

25)



Дано: окр. (P, r_1)
окр. (Q, r_2)
окр. $(P, r_1) \cup$ окр. (Q, r_2) K, L

Рассмотрим
$\triangle KQL$ и $\triangle KPL$
проведем KQ и QL,
затем KP и PL

$$\left.\begin{cases} KQ = QL \text{ как радиусы} \\ KP = PL \text{ как радиусы} \\ PQ \text{ - общая сторона} \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle KPQ = \triangle QPL$$

$\angle KQP = \angle PQL$ как соответствующие элементы.

Следовательно QH - биссектриса

Т.к $KQ = QL$, $\triangle KQL$ - равнобедренный. По св-ву равнобедренного треугольника биссектриса, проведенная к основанию, является высотой

ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 25.

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	0	1	0	2

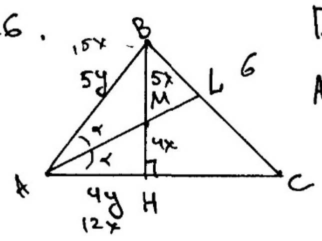
Задание 26 с развернутым ответом высокого уровня сложности.

Задание для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности. Ответ: 5.

№26.



Дано:

$ABC - \Delta$

$BH - h$

$AL - \ell$

$AL \cap BH = $ т.M

$BM : MH = 5:4$

$BC = 6$

$R - ?$

Решение:

По т. о биссектрисе в ΔABH $AM - \ell$

$\frac{AB}{AH} = \frac{BM}{MH} = \frac{5}{4}$.

по т. Пифагора

в ΔABH, ΔABH − п/у $\angle H = 90$.

$AB^2 = BH^2 + AH^2$

$25y^2 = 16y^2 + 81x^2$

$9y^2 = 81x^2$

$3y = 9x$

$y = 3x$.

$\sin\angle A = \frac{BH}{AH} = \frac{9x}{15x} = 0{,}6$

По т. sin

$2R = \frac{BC}{\sin\alpha}$

$2R = \frac{6}{0{,}6}$

$2R = 10$

$R = 5$

Ответ: 5

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности. Ответ: 5.

№26

Дано: AD-бис. $\angle A$; BH-выс.; $\frac{BO}{OH} = \frac{5}{4}$
$BC = 6$ Найти: R-?

№26

Решение:

1) по свойству биссектрисы треугольника: $\frac{BO}{OH} = \frac{AB}{AH} = \frac{5}{4}$; но также по свойству высоты (как среднее пропорциональное) получаем, что $\frac{BC}{HC} = \frac{5}{4}$

2) пусть x – 1 часть

$\frac{BC}{HC} = \frac{5}{4}$ $\quad \frac{6}{HC} = \frac{5x}{4x}$ $\quad HC = \frac{6 \cdot 4\cancel{x}}{5\cancel{x}} = \frac{24}{5} = 4{,}8$

3) ΔBHC ($\angle H = 90^\circ$): по теореме Пифагора: $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$BH^2 = 6^2 - 4{,}8^2$ $\quad BH^2 = (6-4{,}8)(6+4{,}8) = 1{,}2 \cdot 10{,}8$ $\quad BH = 3{,}6$

4) ΔAHB ($\angle H = 90^\circ$): по теореме Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$25x^2 = 16x^2 + 12{,}96$ $\quad 9x^2 = 12{,}96$ $\quad x^2 = 1{,}44$ $\quad x = 1{,}2$ - 1 часть

$AB = 1{,}2 \cdot 5 = 6$

5) по теореме синусов: $2R = \frac{AB}{\sin\angle H}$; $2R = \frac{6}{1}$

$2R = 6$ $\quad R = 3$

Ответ: $R = 3$.

Оценка эксперта: ______________________

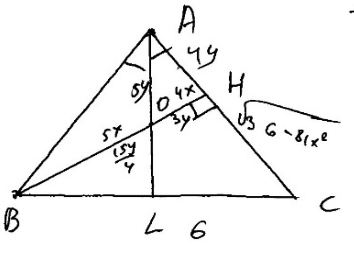
Задание 3.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности. Ответ: 5.

№26

Дано: ΔABC AL – биссектриса $S = \frac{abc}{4R}$

$\frac{BO}{OH} = \frac{5}{4}$ Найти: R



$BC = 6$

Пусть x – 1 часть $OH = 4x$, $BO = 5x$

$HC = \sqrt{36-81x^2}$

$\Delta AOB \sim \Delta AOH$ (2 признак)

$$\frac{AO}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{AB}{AO}$$

$$\frac{AO}{AH} = \frac{5}{4} = \frac{AB}{AO}$$

y – часть $AO = 5y$ ~~AB~~ $AH = 4y$

$AO^2 = AB \cdot AH$

$(4y)^2 + (4x)^2 = (5y)^2$

$16y^2 + 16x^2 = 25y^2$

$16x^2 = 9y^2$

$x^2 = \frac{9y^2}{16}$

$x = \sqrt{\frac{9y^2}{16}} = \frac{3y}{4}$

$BO = 5 \cdot \frac{3y}{4} = \frac{15y}{4}$

$OH = \cancel{4} \cdot \frac{3y}{\cancel{4}} = 3y$

$\sqrt{36-81x^2} =$

$= \sqrt{36 - 81 \cdot \frac{9y^2}{16}}$

$\left(3y + \frac{15y}{4}\right)^2 + \cancel{36} - \frac{81 \cdot 9y^2}{16} = \cancel{36}$

$\left(3y + \frac{15y}{4}\right)^2 = \frac{81 \cdot 9y^2}{16}$

~~$9y^2 + \frac{225y^2}{16} + 2 \cdot 9y \cdot \frac{15y}{4} = \frac{81 \cdot 9y^2}{16}$~~

~~$81 \cdot 16y^2 + 225y^2 + 4 \cdot 2 \cdot 9y \cdot 15y = 81 \cdot 9y^2$~~

$9y^2 + \frac{225y^2}{16} + 2 \cdot 3y \cdot \frac{15y}{4} = \frac{81 \cdot 9y^2}{16}$

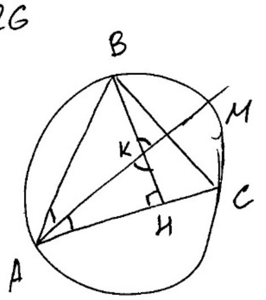
~~$9 \cdot 16y^2 + 225y^2$~~ $+ 8 \cdot 3y \cdot 15y = 81 \cdot 9y^2$

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. *BC* равно 14. Найдите радиус описанной окружности. Ответ: 25.

№26



Решение

1) $\angle BKM$ опирается на ту же дугу что и $\angle BAM$, значит

$\angle BKM = \angle BAM$

2) $\angle BKM = \angle AKH$, как вертикальные углы

$\angle BKM = \angle BA\cancel{M} = \angle MAC$

Дано
$\triangle ABC$
AM – биссектриса
BH – высота
$BK : KH = 25 : 24$
$BC = 14$

R – ?

3) Рассмотрим $\triangle AKH$:
$\angle AHB = 90°$ – прямой, т.к. BH – высота к AC.

$\angle KAH = \angle AKH$ (по 2.), то

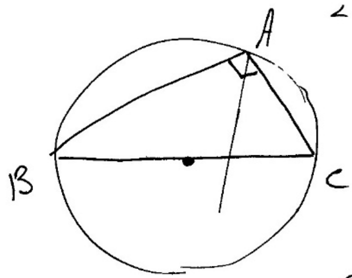
$\angle KAK = 45°$

4) $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC$

$\angle MAC = 45° = \angle BAM$, то

$\angle BAC = 45° + 45° = 90°$

5)



$\angle BAC = 90°$, то
$BC = d = 2R = 14$
$R = 7$

Ответ: 7

Оценка эксперта: ____________________

Задание 26.

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	2	0	0	0

§5. Тренировочные варианты.

Вариант 1.

№1. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$. Ответ: $x=0,5$, $x=-\frac{1}{6}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№21.

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$

$\frac{1}{x}=t$

$t^2+4t-12=0$

$D=16+48=64$

$\left\{\begin{array}{l} t=\frac{-4+8}{2}=2 \\ t=\frac{-4-8}{2}=-6 \end{array}\right.$

$\frac{1}{x}=2$ или $\frac{1}{x}=-6$

$x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{6}$

Ответ: $\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№2. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$. Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

№21.

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$, домножаем на $-(x-1)^2$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 10\cdot(x-1)^2-3(x-1)-1=0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x\neq 1 \\ 10x^2-23x+12=0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$10x^2-15x-(8x-12)=0;\ x\neq 1$

$\Updownarrow$

$5x(2x-3)-4(2x-3)=0;\ x\neq 1$

$\Updownarrow$

$(5x-4)(2x-3)=0;\ x\neq 1$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0{,}8 \\ x=1{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=0{,}8 \\ x=1{,}5 \end{array}\right.$

Ответ: $\{0{,}8;\ 1{,}5\}$

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

____

№3. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$. Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

21. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$

$\frac{1}{(x-1)^2}^{\backslash 1}+\frac{3}{x-1}^{\backslash x-1}=10$

$\frac{1+3(x-1)}{(x-1)^2}=10$

$\frac{1+3x-3}{(x-1)^2}=10$

$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=10$

$3x-2=10(x^2-2x+1)$

$3x-2=10x^2-20x+10$

$10x^2-20x+10-3x+2=0$

$10x^2-23x+12=0$

$D=b^2-4ac=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49>0 \Rightarrow 2$ различных корня.

$x_{1,2}=-\frac{b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{23\pm7}{20}$

$\frac{23+7}{20}=\frac{30}{20}=1{,}5$

$\frac{23-7}{20}=\frac{16}{20}=0{,}8$

Ответ: $x_1=0{,}8$

$x_2=1{,}5$.

Оценка эксперта:______________________________________

Комментарий:______________________________________

№4. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно составлено уравнение, получен верный ответ
1	Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№22.

Пусть произв. Игоря $= \frac{1}{x}$ р/ч, Паши $= \frac{1}{y}$ р/ч, Володи $\frac{1}{z}$ р/ч,

тогда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{21}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{28}$ р/ч.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ???$

Сложив 3 ~~уравнения~~ равенства получим

$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28}$

$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{21}{420} + \frac{20}{420} + \frac{15}{420}$ $\qquad \frac{56}{420} = \frac{2}{15}$

$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{2}{15}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$ за час они втроем сделают $\frac{1}{15}$ работы

Значит всю они выполнят за 15 часов.

Ответ: 15ч.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№5. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 700 минут.

N 22

Пусть x заборов/ч – производительность (скорость покраски) Паши, y з/ч – Игоря, а z з/ч – Володи. Тогда $\frac{1}{x+y}$ ч – время покраски забора Пашей и Игорем, $\frac{1}{x+z}$ ч – Пашей и Володей, $\frac{1}{y+z}$ ч – Игорем и Володей. А по условию задачи эти времена равны соответственно 14ч, 15ч и 30ч. Составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 14 \\ \frac{1}{x+z} = 15 \\ \frac{1}{y+z} = 30 \end{cases}$$

1) $\frac{1}{x+y} = 14$

$$\begin{cases} x+y \neq 0. \\ x+y = \frac{1}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y \neq 0. \\ y = \frac{1}{14} - x \end{cases}$$

2) $\frac{1}{x+z} = 15$

$$\begin{cases} x+z \neq 0 \\ x+z = \frac{1}{15} \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z \neq 0 \\ z = \frac{1}{15} - x \end{cases}$$

3) $\frac{1}{y+z} = 30$

$$\begin{cases} y+z \neq 0 \\ y+z = \frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{14} - x + \frac{1}{15} - x \neq 0. \\ \frac{1}{14} - x + \frac{1}{15} - x = \frac{1}{30} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{29}{210} \neq 2x \\ 2x = \frac{29}{210} - \frac{7}{210} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq \frac{29}{420} \\ x = \frac{22}{420} \end{cases}$$

$x = \frac{11}{210}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{14} - \frac{11}{210} = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{15} - \frac{11}{210} = \frac{3}{210} = \frac{1}{70}$

4) $\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{\frac{11}{210} + \frac{2}{105} + \frac{1}{70}} = \frac{1}{\frac{11}{210} + \frac{4}{210} + \frac{3}{210}} = \frac{1}{\frac{18}{210}} =$

$= \frac{210}{18} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ ч $= 11$ч 40мин

(время покраски забора, если бы все 3 мальчика работали вместе)

Ответ: $11\frac{2}{3}$ ч

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№6. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

$\boxed{21}$

Пусть Паша красит за 1 час X часть забора,
Тогда Володя красит за 1 час Y часть забора,
а Игорь - Z часть забора.

Паша и Володя красят за час ~~Z~~+Y часть забора, Володя и Игорь - Z+X,
а Игорь и Паша - X+Y.

Тогда за 20 часов П. и И. красят весь забор: $1=20(x+y)$
За 21 час весь забор закрашивают Паша и Володя:
$1=21(y+z)$. а В. и И. за 28 часов: $1=28(z+x)$

$$\begin{cases}20(x+y)=1\\21(y+z)=1\\28(z+x)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}420(x+y)=21\\420(x+y)=20\\420(z+x)=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}420x+420y=21\\\cancel{420(x+y)=20}\quad 420x+420y=20\\420z+420x=15\end{cases}$$

Сложим 1 и 2 уравнение и вычтем 3

$420x+420y-420z-420x+420x+420y=21-15+20$

$840y=26 \quad y=\frac{26}{840}$

Сложим 2 и 3 уравнение и вычтем 1: $420y+420z+420z+420x-$
$-420x-420y=20+15-21 \qquad 840z=14 \quad z=\frac{14}{840}$

Сложим 1 и 3 уравнение и вычтем 2

$420x+420y+420z+420x-420y-420z=21+15-20$

$840x=16 \quad x=\frac{16}{840}$

Все вместе они красят $x+y+z$ часть забора: $\frac{16+14+26}{840}=\frac{56}{840}=\frac{7}{105}$
, а за $\frac{105}{7}$ часов они красят весь забор, $=15$ часов $=15\cdot 60$ минут $=$
$=900$ минут

Ответ: За 900 минут.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№7. Постройте график функции: $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен правильно, верно указаны все значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком только одну общую точку
1	График построен правильно, указаны не все верные значения c
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

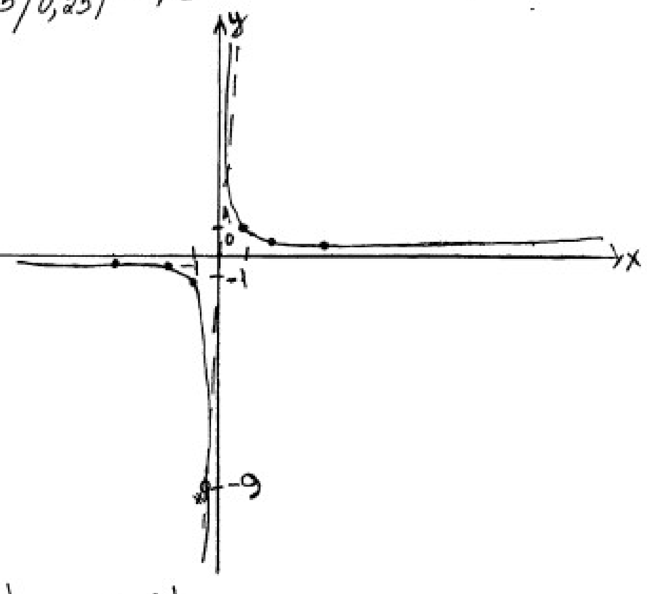
N23

$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x} = \dfrac{\cancel{9x+1}}{x(\cancel{9x+1})} = \dfrac{1}{x}$

ОДЗ: $9x^2+x \neq 0$
$x(9x+1) \neq 0$
$x \neq 0$; $9x+1 \neq 0$
$9x \neq -1$
$x \neq -\dfrac{1}{9}$

$y = \dfrac{1}{x}$ – графиком функции является гипербола

x	1	-1	2	-2	4	-4
y	1	-1	0,5	-0,5	0,25	-0,25



$y = kx$
$k \cdot \left(-\dfrac{1}{9}\right) = -9$
$k = -9 : \left(-\dfrac{1}{9}\right) = -9 \cdot \left(-\dfrac{9}{1}\right)$
$k = -81$
$k = 0$

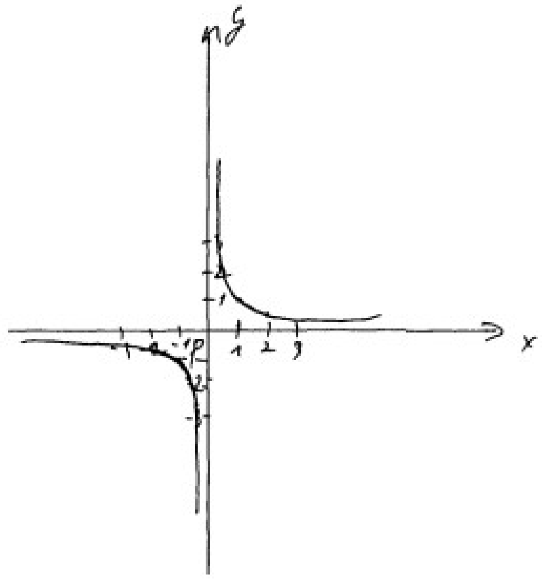
Ответ: при $k = -81$ и $k = 0$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№8. Постройте график функции: $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.

№23



$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

x	1	2	0,5	-2	-1	-0,5
y	1	0,5	2	-0,5	-1	-2

$y = kx$

$kx = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$9x + 1 = 9kx^3 + kx^2$

$9kx^3 + kx^2 - 9x - 1 = 0$

$D = k^2 - 4 \cdot 9k \cdot (-9) = k^2 + 324k$

$k(k + 324) = 0$

$k = 0$ или $k = -324$

Ответ: $k = 0; -324$

Оценка эксперта:____

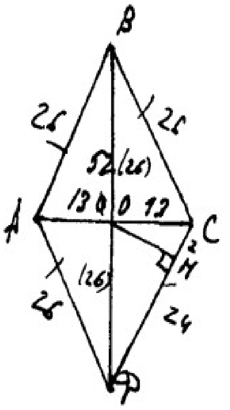
Комментарий:____

____

№9. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: 10.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Получен верный обоснованный ответ
1	При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

24.



Найти: OH - ?

Решение:

1) Т.к. ABCD - ромб ⇒ AB = CD = BC = DA = 26 см

2.) По свойству катет AO, лежащий против ∠ 30° (∠AOB) равен $\frac{1}{2}$ AB (гипотенуза) ⇒ AO = 13 см. Т.к AO = OC - диаг. ромба ⇒ AO = OC = 13 см

3). По свойству диагонали AC меньше BD в 2 раза ⇒ BD = = 26·2 = 52 см

4) Рассм. △ OHD - прямоугольный; По Т Пифагора:

$26^2 = 24^2 + OH^2$

$676 = 576 + OH^2$

$OH^2 = 676 - 576$

$OH^2 = 100$

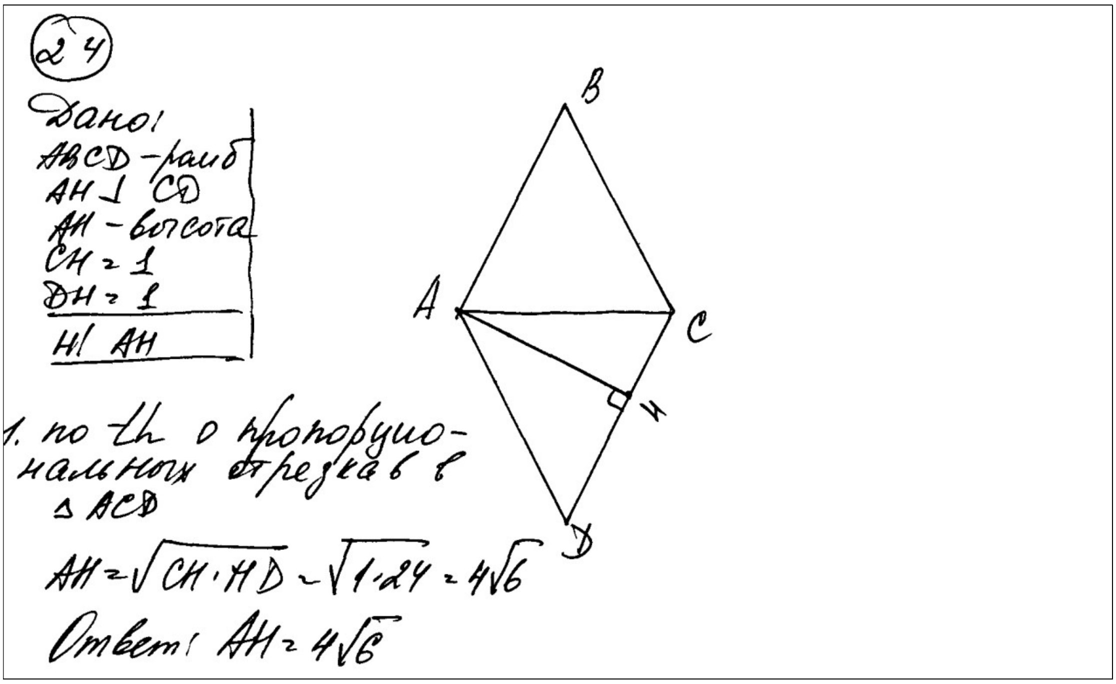
$\underline{OH = 10}$

Ответ: OH = 10 см

Оценка эксперта:________________________________

Комментарий:________________________________

№10. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону пополам, на отрезки равные 1. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: $\sqrt{3}$.



(24)

Дано:
$ABCD$ – ромб
$AH \perp CD$
AH – высота
$CH = 1$
$DH = 1$

Н/ AH

1. по th о пропорцио-нальных отрезках в $\triangle ACD$

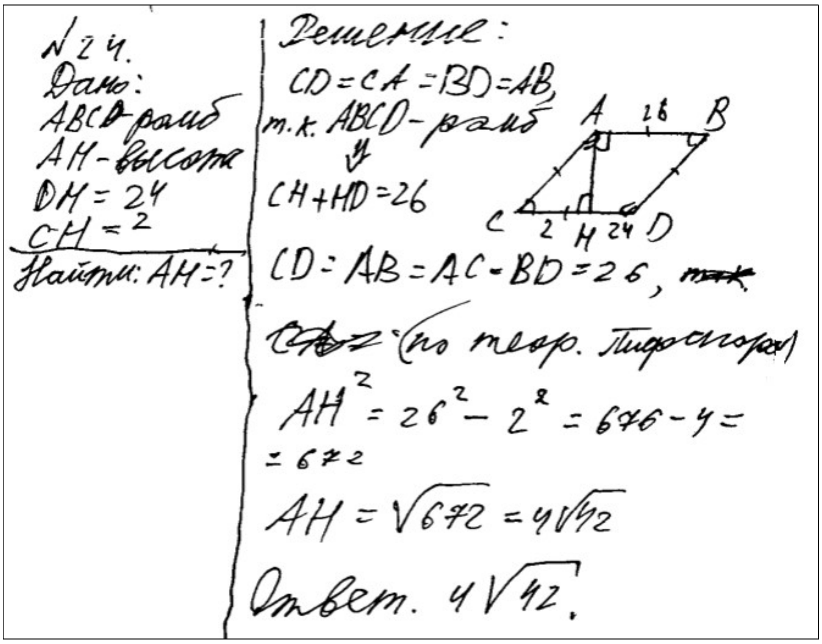
$AH = \sqrt{CH \cdot HD} = \sqrt{1 \cdot 24} = 4\sqrt{6}$

Ответ: $AH = 4\sqrt{6}$

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№11. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: 10.



№24.

Дано:
$ABCD$-ромб
AH-высота
$DH = 24$
$CH = 2$

Найти: $AH = ?$

Решение:

$CD = CA = BD = AB$, т.к. $ABCD$-ромб

$\Downarrow$

$CH + HD = 26$

$CD = AB = AC = BD = 26$, ~~так~~

(по теор. Пифагора)

$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 = 672$

$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$

Ответ. $4\sqrt{42}$.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

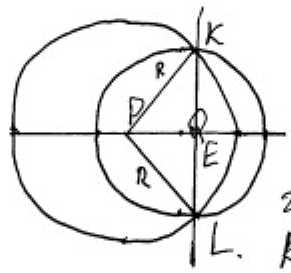
№12. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№ 25

Дано:
окружность с центром в P и радиусом R;
окружность с центром в Q и радиусом r.

Д-ть: $PQ \perp KL$



Решение

1) E — точка пересечения прямых PQ и KL

2) Проведём радиусы R от центра окружности P к точкам K и L. Мы получим $\triangle PKL$.

3) Рассмотрим $\triangle PKL$:

$PK=PL$ $(R=PK=PL) \Rightarrow \triangle PKL$ - равнобедр.

$\Downarrow$

$\angle KLP = \angle LKP$.

4) По т. cos в $\triangle PEL$ и $\triangle PKE$:

$PE^2 = R^2 + EL^2 - 2R \cdot EL \cdot \cos\angle KLP$

$PE^2 = R^2 + KE^2 - 2R \cdot KE \cdot \cos\angle LKP$

$\Downarrow$

$R^2 + EL^2 - 2R \cdot EL \cdot \cos\angle KLP = R^2 + KE^2 - 2R \cdot KE \cdot \cos\angle LKP$

$\angle KLP = \angle LKP$

$\Downarrow$

$EL = KE$.

$\Downarrow$

PE — медиана р/б $\triangle PKL$

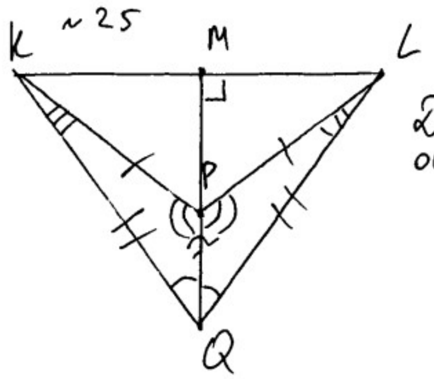
$\Downarrow$

PE — высота $\triangle PKL$ по св-ву медианы в р/б $\triangle$

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№13. Две окружности с центрами P и Q пересекаются в точках K и L, центры P и Q лежат по одну сторону относительно прямой KL. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой KL.



Дано:
окружности с центрами P и Q, и радиусами PK и QK соответств.
Доказать:
$PQ \perp KL$

Доказательство
$QK = QL$ (R одной окр)
$PL = PK$ (R одной окр)
$\Delta KPQ = \Delta PLQ$ (3 признак)
MQ – биссектриса угла KQL, она же является и медианой и высотой т.к ($KQ = QL$)
$PQ \perp KL$ (т.к отрезок QP лежит на прямой MQ, которая $\perp KL$, соответственно KL также $\perp PQ$)

Оценка эксперта:____

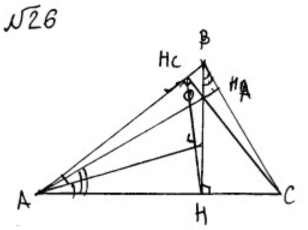
Комментарий:____

№14. Биссектриса угла A, треугольника ABC делит высоту BH в отношении 5:4, считая от вершины. Длина BC равна 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№26



1) Т.к AL биссектриса и $BL:LH=5:4 \Rightarrow AB:AH=5:4 \Rightarrow AB=5k$ и $AH=4k$, т.к. ΔABC-прямоугольный то $BH=3k$.

2) CH_C и AH_A высоты, тогда четырехугольник ABH_AH - ~~описанный~~ $\Rightarrow$

$\angle OAH=\angle HBC \Rightarrow \Delta AOH \sim BHC \Rightarrow \frac{AO}{BC}=\frac{AH}{BH}=\frac{4}{3} \Rightarrow AO=\frac{4}{3}\cdot BC=8$

3) Т.к. четырехугольник AH_COH - описанный и $\angle AH_CO$ и AHO - прямые, то OH диаметр описанной окружности этого четырехугольника $\Rightarrow$ радиус описанной окружности $\Delta H_CAH=5$.

4) Т.к. четырехугольник H_CHBC - вписанный, то $\angle ABC=\angle AHH_C \Rightarrow$

$\Delta AH_CH \sim ABC \Rightarrow \frac{r_{ABC}}{r_{H_CHA}}=\frac{AB}{AH}=\frac{5}{4} \Rightarrow r_{ABC}=\frac{5}{4}\cdot r_{H_CHA}=5$

Ответ: 5.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№15. Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. Длина *BC* равна 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

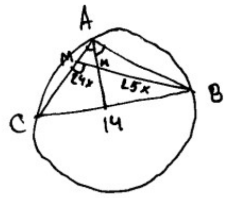
26.

Дано:
AH – биссектриса

$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$

$BC = 14$

Найти:
R



Решение:

AH – биссектриса (по условию)

$\Downarrow$

$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда $AB = 25y$

$\Downarrow$

$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)

$\Downarrow$

$\sin\angle A = \frac{7}{25}$

$\Leftarrow$

$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$

$\Downarrow$

$R = 25$

Ответ: 25.

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

Вариант 2

№1. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$. Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

2.1 $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3^{\backslash t}}{t}-10^{\backslash t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0 \qquad t^2\neq 0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \ |\cdot(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+4\cdot\overset{40}{\overbrace{1\cdot 10}}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$
  $x=1{,}5$
- $x-1=-0{,}2$
  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

____

№2. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$. Ответ: $x=0,5$, $x=-\frac{1}{6}$.

№2]

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0;$

$\frac{1}{x^2}+\frac{4^{\backslash x}}{x}-12^{\backslash x^2}=0;$

$\frac{1}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{12x^2}{x^2}=0,$

$\frac{-12x^2+4x+1}{x^2}=0;$

Дробь равна 0, когда её числитель равен 0.

$-12x^2+4x+1=0$; $a=-12$, $b=4$, $c=1$

$D=b^2-4ac=4^2-4(-12)\cdot 1=16+48=64$

$x_1=\frac{-4+8}{2(-12)}=-\frac{4}{24}=-\frac{1}{6}$

$x_2=\frac{-4-8}{2(-12)}=\frac{-12}{-24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}=0,5$

Ответ: $-\frac{1}{6}$; 0,5

Оценка эксперта:________________________________

Комментарий:________________________________

№3. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$. Ответ: $x=1,5$, $x=0,8$.

1. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0.$

$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0.$

$\frac{1+3x-3-10x^2+20x-10}{(x-1)^2}=0$

$x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$-10x^2+23x-12=0 \quad |\cdot(-1)$

$10x^2-23x+12=0$

$D=529-480=49=7^2$

$x_1=\frac{23-7}{20}=\frac{16}{20}=0,8$

$x_2=\frac{23+7}{20}=\frac{30}{20}=1,5$

Ответ: 0,8; 1,5.

Оценка эксперта:________________________________

Комментарий:________________________________

№4. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно составлено уравнение, получен верный ответ
1	Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Начало решения задания №4

№22. I. Пусть V работы Паши $= x$.
Тогда V работы Игоря $= y$; V работы Володи $= z$.
Примем весь покрашенный забор (всю работу) за 1.
Тогда, по условию $\frac{1}{x+y} = 20$ часов; $\frac{1}{x+z} = 21$ час; $\frac{1}{y+z} = 28$ часов

II

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 20 \\ \frac{1}{x+z} = 21 \\ \frac{1}{y+z} = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{20} - x \\ \frac{1}{x+z} = 21 \\ \frac{1}{\frac{1}{20} - x + z} = 28 \end{cases}$$

$$\frac{1 \cdot 20}{1 - 20x + 20z} = 28$$

$$20z - 20x = \frac{20}{28} - 1 = \frac{10}{14} - 1 = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}$$

$$20z = -\frac{2}{7} + 20x$$

$$z = \left(-\frac{2}{7} + 20x\right)/20$$

Продолжение на следующей странице

Продолжение решения задания №4

$$\frac{\frac{-2}{7}+20x}{20}=\frac{-2+140x}{140}=\frac{2(70x-1)}{2\cdot 70}=\frac{70x-1}{70}=z$$

$$\frac{1}{x+\frac{70x-1}{70}}=21$$

$$\frac{70}{70x+70x-1}=21$$

$$\frac{70}{140x-1}=21$$

$$140x-1=\frac{70}{21}=\frac{7\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{10}{3}$$

$$140x=\frac{10}{3}+1=\frac{13}{3}$$

$$x=\frac{13}{3\cdot 140}=\frac{13}{420}$$

$$z=\left(\frac{\frac{70\cdot 13}{420_6}-1}{70}\right)=\frac{\frac{13}{6}-1}{70}=\frac{7}{6\cdot 70}=\frac{7}{420}$$

$$y=\frac{1^{\backslash 21}}{20}-\frac{13}{420}=\frac{21}{420}-\frac{13}{420}=\frac{8}{420}$$

$$\frac{1}{\frac{7}{420}+\frac{8}{420}+\frac{13}{420}}=\frac{420}{7+8+13}=\frac{420}{28}=15 \text{ часов}$$

15 часов $=15\cdot 60=900$ минут.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

____

№5. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

(22) Примем всю работу за единицу. Тогда производительность Игоря (И) и Паши (П) → $\frac{1}{20}$; Паши и Володи (В) → $\frac{1}{21}$; Володи и Игоря → $\frac{1}{28}$; С такими показателями производительности вместе они покрасят забор дважды:

$$\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28}\right)t = 2 \qquad (И+П+В)t = 1$$

т.к. $(И+П+П+В+В+И)t = 2$ т.е $(2И+2П+2В)t = 2$

где t – время в часах (за которое ребята выполнят работу дважды)

Т.о., $\frac{t}{20} + \frac{t}{21} + \frac{t}{28} = 2 \Rightarrow \frac{3\cdot 5\cdot t + 4\cdot 5t + 3\cdot 7t}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} = 2$

$\frac{(15+20+21)t}{420} = 2 \quad \frac{56t}{420} = 2 \quad 28t = 420$

$t = 15ч$ → 2 раза

$t_1 = \frac{15ч}{2} = 7{,}5ч = 7{,}5\cdot 60мин = 450$ мин → ответ: 450 мин

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№6. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. . Ответ: 700 минут.

Дано: N22.

П, И } 14ч

П, В } 15ч

В, И } 30ч

Найти. П, И, В } ?

Решение:

$П > И > В$

$И = 30 - 14 = 16$ ч - дел. р. И

$(14\cdot 2) - 16 = 12$ ч - делает работу П

$30 - 16 = 14$ч - дел. р. В.

$\frac{14+16+12}{6} = 7ч = 420$ мин - потребуется, чтобы мальчики покрасили забор, работая втроем.

Ответ. 420 мин.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№7. Постройте график функции: $y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 0,49.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен правильно, верно указаны все значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком только одну общую точку
1	График построен правильно, указаны не все верные значения c
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№23.

$y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$

$y=\dfrac{7x-10}{x(7x-10)}$

ОДЗ: $x\neq 0$
$x\neq \frac{10}{7}$

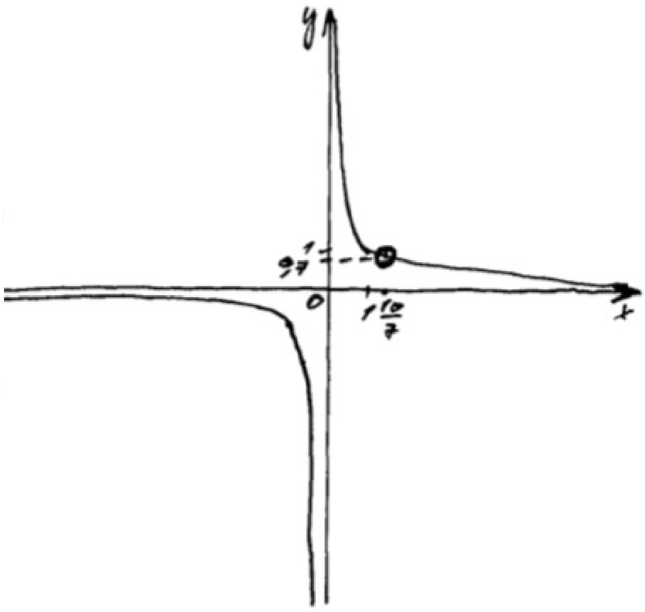
$y=\frac{1}{x}$ – График

при $x=\frac{10}{7}$: $y=\frac{1\cdot 7}{10}=\frac{7}{10}=\cancel{\ }=0{,}7$

$\frac{7}{10}=k\cdot\frac{10}{7}$

$k=\frac{7\cdot 7}{10\cdot 10}=\frac{49}{100}=0{,}49$ При $k=0{,}49$

Ответ: 0,49.



Оценка эксперта:____

Комментарий:____

____

№8. Постройте график функции: $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.

№ 23

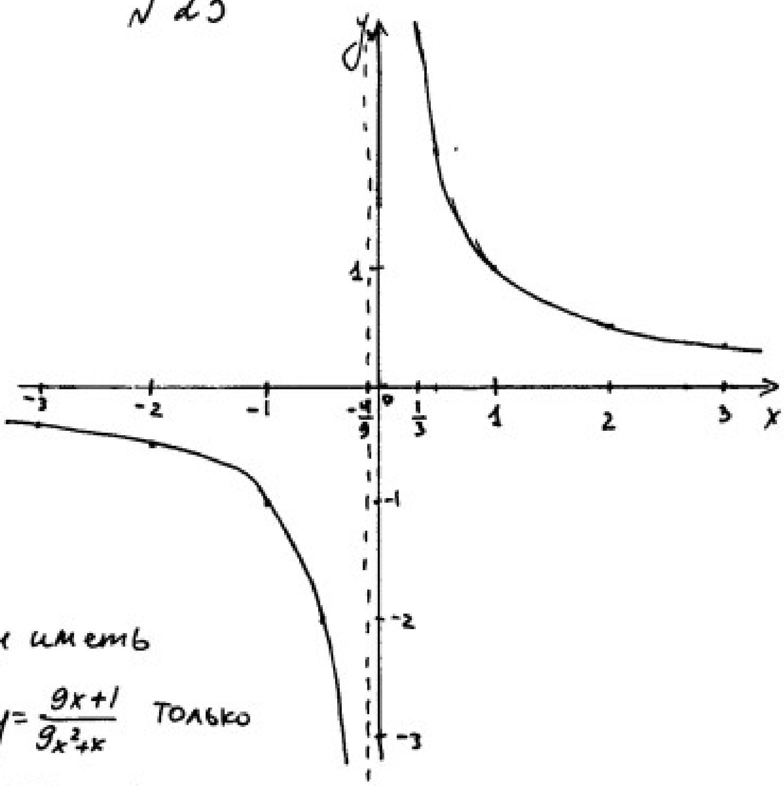
$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \dfrac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ии $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (•) пересечение график ф-ии $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$.

Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \,|\cdot(-9)$

$k = 81$.

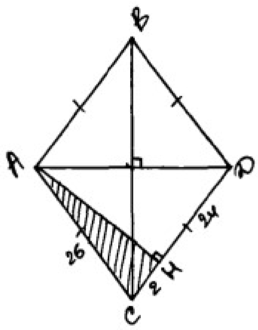
Ответ: 81

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№9.Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: 10.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Получен верный обоснованный ответ
1	При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*



(24) Дано: ABCD – ромб; AH – высота; DH = 24; CH = 2
Найти: AH
Решение: 1) Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны $\Rightarrow$ AC = CD = 24+2 = 26
2) Рассмотрим $\triangle ACH$: он прямоугольный, т.к. AH – высота ABCD; AC – гипотинуза, CH – катет, AH – катет $\Rightarrow$ по теореме Пифагора найдем катет AH.

$26^2 = AH^2 + 2^2$

$676 = AH^2 + 4$

$672 = AH^2$

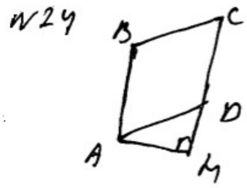
$4\sqrt{42} = AH$ (высота)

Ответ: $4\sqrt{42}$ – высота ромба.

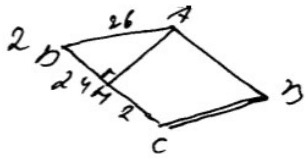
Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№10. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: 10.



BH < CH
что противоречит условию



DC = 26 =>
DA = 26

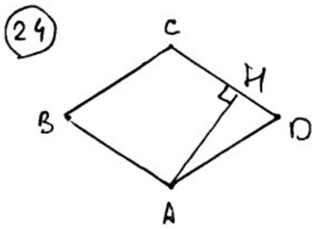
Δ DAH: DA = $\sqrt{26^2+24^2}$ = 10

Ответ: AH = 10

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№11. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: 10.



Дано:
ABCD - ромб
AH - высота
CH = 2
DH = 24
AH - ?

Решение:

1) т.к. ромб стороны равны CD = AD = CH + DH
AD = 26

2) AH = $\sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по th Пифагора на Δ AHD)
AH = $\sqrt{676-576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

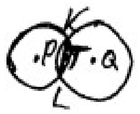
Оценка эксперта:____

Комментарий:____

№12. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№25.



Дано: окр.$(P; r_1)$; окр.$(Q; r_2)$; окр.$(P; r) \cap$ окр.$(Q; r) = K; L$ так, что $PT = TQ$

Док-ть: $PQ \perp KL$.

Док-во:

1) Начертим $\triangle PKQ$.

2) т.к. $PT = TQ$ – по усл. $\Rightarrow$ KT – медиана $\triangle PKQ$ к стороне PQ

3) т.к. (·)-а $K \in$ окр.$(P; r_1)$ и окр.$(Q; r_2)$ $\Rightarrow$ $PK = r_1$, $KQ = r_2$; $PL = PK = r_1$; $KQ = QL = r_2$

4) Из п. 2 и 3 $\Rightarrow$ $\triangle PKL$ – р/б по опр. $(PK = PL)$

Аналогично $\triangle KQL$ – р/б.

5) т.к. $KT = TL$, $PK = PL \Rightarrow PT$ – медиана, а по св-ву р/б $\triangle$-а $\Rightarrow PT \perp$ к KL.

Аналогично QT – медиана $\Rightarrow QT \perp KL$

$\Downarrow$

т.к. $PT = TQ$ (по усл.) $\Rightarrow PQ \perp KL$.

ч.т.д.

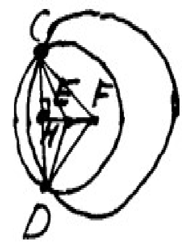
Оценка эксперта:____

Комментарий:____

____

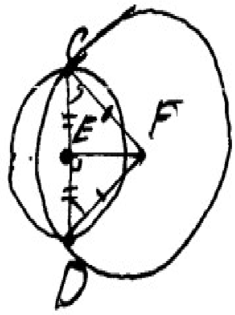
№13. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

№25.



Вариант I.

Д/п – радиусы $EC=ED$; $FC=FD$.
Рассм. $\triangle CED$: $\triangle CED$ – р/б (по опред.)
=> EH опущена к основанию
В $\triangle CFD$: $\triangle CEF=\triangle DEF$ (по 3ём сторонам) =>
=> $\angle CFE=\angle DFE$ => EF – бисс.
Т.к EF – бисс, то HF тоже бисс, т.к $EF\in HF$
=> в р/б $\triangle CED$: EH – бисс. (т.к. $EH\in HF$)
=> EH и высота и медиана (т.к опущена к основанию). Т.к $EH\in HF$; то $HF\perp CD$ и $EF\perp CD$, ч.т.д.



Вариант II.

Д/п – радиусы $CF=DF$. Тогда $\triangle CFD$ – р/б
=> $\angle ECF=\angle FDE$ (по св-ву р/б $\triangle$)
Т.к. CD – диаметр, то $EC=ED$ – радиусы
=> EF – медиана в р/б $\triangle CFD$ =>
EF и высота и биссектрисса (по теореме о высоте и основании в р/б $\triangle$), ч.т.д.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____

____

№14. Биссектриса A, треугольника ABC делит высоту BH в отношении 25:24, считая от вершины. Длина BC равна 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

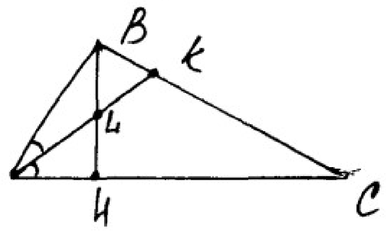
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

№26 $\omega(O;R)$

$BL:LH=25:24$

$BC=14$

Н/ R:



1. по св-ву биссектрисы в △ ABH

$\frac{AB}{AH}=\frac{BL}{LH}=\frac{25}{24}.$

2. по th Пифагора в △ ABH

$BH=\sqrt{25^2a^2-24^2a^2}=a\sqrt{1\cdot 49}=7a$

3. sin в △ ABH:

$\sin A=\frac{BH}{AB}=\frac{7}{25}$

4. $R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{14\cdot 25}{14}=25$

Ответ: $R=25$

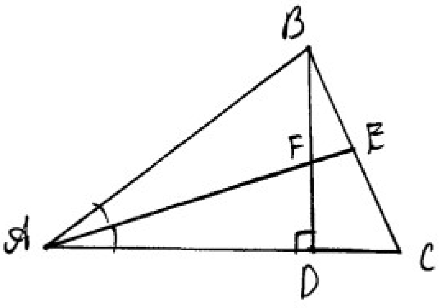
Оценка эксперта:____

***Комментарий**:*____

№15. Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. Длина *BC* равна 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

№26.



дано:

ΔABC, $\angle BDC = 90°$, $\angle BAE = \angle EAC$,

$AE \cap BD = F$, $BF:FD = 5:4$ $BC = 6$

найти:

R оп. окружности,

решение:

1) по св. биссектрисы в ΔABD, $AB:AD = BF:FD = 5:4$ $\Rightarrow$

по теореме Пифагора, $AB:BD = 5:3$ $\Rightarrow$

$\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$,

2) по следствию из теоремы синусов,

$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R_{оп.}$, $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{6}{\frac{3}{5}} = 10$, $\Rightarrow R_{оп.} = 5$,

Ответ: 5.

Оценка эксперта:____

Комментарий:____